UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

52. BAND, 2. HEFT
MIT 16 ABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM JUNI 1948)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1948

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität, Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

52. Band/2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Duschek, A. Über eine neue Art von algebraischen Bereichen 89

Inzinger, R. Über eine Abbildung der Speere einer Ebene 124

Müller, H. R. Über Striktionslinien von Kurven- und Geradenscharen im elliptischen Raum 138

Schmetterer, L. Zum Konvergenzverhalten gewisser trigonometrischer Reihen . 162

Buchbesprechungen 179

Über eine neue Art von algebraischen Bereichen.

Von
A. Duschek, Wien.

Mit 15 Abbildungen.

(Eingelangt am 1. September 1945.)

Einleitung.

Unter einem algebraischen Bereich verstehen wir eine Menge von mathematischen Objekten, in der zwei, in der Regel Addition und Multiplikation genannte und innerhalb der Menge unbeschränkt und eindeutig ausführbare Operationen definiert sind. Die im folgenden eingeführten und als *Klassen* bezeichneten neuen algebraischen Bereiche unterscheiden sich von den Ringen und Körpern vor allem dadurch, daß weder die Gültigkeit des distributiven Gesetzes noch die Umkehrbarkeit der beiden obigen Operationen, oder auch nur die der Addition allein gefordert wird. Anstelle dieser Forderungen tritt vielmehr hier die in § 1 aufgestellte Forderung IV, die von gänzlich anderer Struktur ist als das distributive Gesetz oder die Umkehrbarkeit von Addition oder Multiplikation, sodaß die Klassen sich recht wesentlich von den Ringen oder Körpern unterscheiden.

Da die erwähnte Forderung IV sowie die vorhergehenden aus zwei Teilen besteht, die sich auf Addition und Multiplikation beziehen, herrscht in den Forderungen eine völlige Symmetrie zwischen den beiden Operationen, sofern man nicht auf Teile dieser Forderungen verzichtet, wie wir das im folgenden für die Forderung IV mitunter machen werden. Um eine Klasse völlig zu bestimmen, muß noch das „Einmaleins" der Klasse angegeben werden, d. h. eine Reihe von Vorschriften, welche zu je zwei vorgegebenen Elementen der Klasse deren Summe und Produkt anzugeben gestatten. Herrscht auch hier eine volle Symmetrie zwischen Addition und Multiplikation, so besteht in der Klasse eine

völlige Dualität zwischen diesen beiden Operationen, d. h. neben jede Formel tritt gleichberechtigt eine zweite, die sich aus der ersten durch Vertauschung der beiden Operationszeichen ergibt.

Es ist weiter nicht verwunderlich, daß man durch Änderung der Definitionen und Forderungen neue Arten algebraischer Bereiche bekommt und daß diese Bereiche unter Umständen auch ganz interessante Eigenschaften haben. Überraschend dürfte es aber sein, daß der hier neu eingeführte Klassenbegriff die Grundlage für zwei Anwendungsgebiete bildet, die so weit auseinander liegen, daß man fürs erste kaum einen Berührungspunkt, geschweige denn eine gemeinsame Basis vermutet. Diese beiden Gebiete sind der Aussagenkalkül der algebraischen Logik und die Theorie der elektrischen Schaltungen; der Aussagenkalkül war bisher allein für die mathematische Grundlagenforschung von Bedeutung, während die elektrischen Schaltungen einen Teil der praktischen Elektrotechnik bilden, der erst in der letzten Zeit durch die Ansätze und Gedankengänge von *O. Plechl* einer mathematischen Behandlung erschlossen wurde[1].

Die folgenden Untersuchungen wollen diese gemeinsame Basis von Schaltalgebra und Aussagenkalkül von einem allgemeineren algebraischen Standpunkt aus behandeln. Grundlegend dafür erscheint der Klassenbegriff, und zwar ist es die einfachste Klasse, die überhaupt existiert und die aus nur zwei Elementen besteht, die diese gemeinsame Basis bildet; aber sowohl im Aussagenkalkül als auch in der Schaltalgebra liegen Ansätze zu Verallgemeinerungen vor, nämlich auf der einen Seite die sogenannten mehrwertigen Logiken und auf der anderen Seite die Schaltungen, in welchen Widerstände nicht als Verbraucher, sondern als Bestandteile der Schaltungen selbst auftreten, und die beide als Anwendungen höherer Klassen erscheinen. Wenn ich im folgenden bei der Behandlung dieser Fragen etwas ausführlicher von technischen Dingen rede, so möge mir das der „reine" Mathematiker verzeihen. Zu meiner Rechtfertigung möchte ich nur sagen, daß diese Dinge auch vom rein mathematischen Standpunkt gar nicht uninteressant sind und daß ich mich der Meinung der Leute durchaus anschließe, die behaupten, daß abstrakte Überlegungen durch ihre Anwendbarkeit auf praktische Fragen eine Art höherer Weihe bekommen.

[1] Vgl. die Note von *A. Duschek* und *O. Plechl*, Grundzüge einer Algebra der elektrischen Schaltungen (Österr. Ingenieur-Archiv I, S. 203—230); wo sich auch weitere Literaturangaben finden.

1. Begriff der Klasse.

Gegeben sei eine Menge, deren Elemente irgendwelche unterscheidbare mathematischen Objekte A, B, C, ... sind. Wir nennen eine solche Menge eine *Klasse*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

I. Es sind in der Menge zwei verschiedene Verknüpfungen je zweier Elemente definiert, die wir als Addition und Multiplikation bezeichnen und die innerhalb der Menge unbeschränkt und eindeutig ausführbar sind. Es existieren also in der Menge zu je zwei Elementen A und B die eindeutig bestimmten Elemente[2]

(1 S) $C=A+B$ (1 P) $D=A\,.\,B$,

und zwar existiert mindestens ein Paar A, B in der Menge, so daß $C \neq D$ ist.

II. Die beiden Operationen genügen dem kommutativen Gesetz

(2 S) $A+B=B+A$, (2 P) $A\,.\,B=B\,.\,A$.

III. Die beiden Operationen genügen dem assoziativen Gesetz

(3 S) $A+(B+C)=(A+B)+C$, (3 P) $A\,.\,(B.C)=(A.B)\,.C$.

IV. Aus

(4 S) $A+A=B+B$ oder (4 P) $A\,.\,A=B\,.\,B$

folgt immer

$$A=B.$$

Gilt nur die Forderung IV S oder nur IV P allein, so sprechen wir von einer *S-Klasse* oder von einer *P-Klasse*; sind beide Forderungen erfüllt, so sprechen wir von einer *Klasse* schlechthin.

Eine Klasse heißt endlich oder unendlich, je nachdem sie endlich oder unendlich viele Elemente enthält.

Ist A ein Element einer Klasse, so setzen wir zur Abkürzung

(5 S) $A+A=2A$, $2A+A=3A$, ..., $(n-1)\,A+A=nA$, ...

(5 P) $A\,.\,A=A^2$, $A^2\,.\,A=A^3$, ..., $A^{n-1}\,.\,A=A^n$, ...

Die Forderung IV kann man durch die folgende schärfere ersetzen:

(IV′) Aus

(4′ S) $kA=kB$

[2] Die meisten der folgenden Formeln bestehen aus zwei Teilformeln, von denen sich die erste auf die Addition, die zweite auf die Multiplikation bezieht und die wir im folgenden durch den der Formelnummer beigesetzten Buchstaben S oder P unterscheiden.

oder aus

(4′ P) $$A^k = B^k$$

folgt für alle positiven ganzen Zahlen k stets $A = B$. Wir nennen Klassen, für die die Forderung IV′ erfüllt ist, *Vollklassen*; gilt nur IV′ S oder nur IV′ P, so sprechen wir von einer *S-Vollklasse* bzw. von einer *P-Vollklasse*.

Es sei nun A ein beliebiges Element einer *endlichen* Klasse. Wir betrachten die Folge

(6) $$A_1 = A,\ A_2 = 2A,\ A_3 = 3A,\ \ldots,\ A_i = i\,.\,A,\ \ldots$$

In dieser Folge können nicht immer verschiedene Elemente erscheinen, da die ganze Klasse voraussetzungsgemäß nur endlich viele verschiedene Elemente enthält. Wir müssen vielmehr einmal auf ein Glied der Folge stoßen, das einem vorhergehenden gleich ist; sei A_n das erste Element von (6), für welches das zutrifft und es sei

(7) $$A_n = A_k, \qquad 1 \leqq k < n.$$

Wir sagen dann, das Element A sei von der S-Ordnung $n-k$. n ist dabei voraussetzungsgemäß die kleinste Zahl, für die eine Relation der Art (7) gilt.

Wir zeigen, daß *stets* $k = 1$ *und* n *gerade* ist. Zum Beweis stellen wir zunächst fest, daß aus (7) die allgemeinere Relation

(8) $$A_{n+\nu} = A_{k+\nu}\ (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgt. Wir betrachten die Folge

(9) $$A_1 + A_1 = A_2,\ A_2 + A_2 = A_4,\ \ldots,\ A_i + A_i = A_{2i},\ \ldots$$

und nehmen an, daß n und k beide gerade sind. Dann gibt es in der Folge (9) sicher die Elemente

$$A_{\frac{k}{2}} + A_{\frac{k}{2}} = A_k \qquad \text{und} \qquad A_{\frac{n}{2}} + A_{\frac{n}{2}} = A_n,$$

also ist wegen (7)

$$A_{\frac{n}{2}} + A_{\frac{n}{2}} = A_{\frac{k}{2}} + A_{\frac{k}{2}}$$

oder wegen IV S

$$A_{\frac{n}{2}} = A_{\frac{k}{2}},$$

in Widerspruch zu der Voraussetzung, daß n die kleinste Zahl ist, für die eine Relation der Art (7) gilt.

Es seien nun n und k beide ungerade. Aus (8) folgt für $\nu = 1$,

$$A_{n+1} = A_{\frac{n+1}{2}} + A_{\frac{n+1}{2}} = A_{k+1} = A_{\frac{k+1}{2}} + A_{\frac{k+1}{2}},$$

also wegen IV S

$$A_{\frac{n+1}{2}} = A_{\frac{k+1}{2}},$$

was wieder ein Widerspruch zu (7) ist; denn auch wenn $\frac{n+1}{2} = n$ und $\frac{k+1}{2} = k$ ist, so wird $n = k = 1$, was aber ein Widerspruch zu der Annahme $n > k$ wäre.

Es sei nun n ungerade und k gerade. Wir setzen $n = k + h$; h ist dann ungerade und $< n$.

Wegen (7) und (8) ($\nu = h$) folgt

$$A_k = A_n = A_{k+h} = A_{n+h},$$

also, da k und $n + h$ gerade sind,

$$A_{\frac{n+h}{2}} + A_{\frac{n+h}{2}} = A_{\frac{k}{2}} + A_{\frac{k}{2}},$$

und wegen IV S

$$A_{\frac{n+h}{2}} = A_{\frac{k}{2}};$$

da wegen $h < n$ auch $\frac{n+h}{2} < n$ ist, wäre wieder n nicht die kleinste Zahl, für die (7) gilt.

Schließlich sei n gerade und k ungerade. Wir setzen wieder $n = k + h$; h ist ungerade und wieder $< n$. Es gilt

$$A_{k+1} = A_{n+1} = A_{k+h+1} = A_{n+h+1},$$

also

$$A_{\frac{n+h+1}{2}} + A_{\frac{n+h+1}{2}} = A_{\frac{k+1}{2}} + A_{\frac{k+1}{2}}$$

und wegen IV S wieder

$$A_{\frac{n+h+1}{2}} = A_{\frac{k+1}{2}}.$$

Das ist aber jetzt nur dann ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß n die kleinste Zahl ist, für die (7) gilt, wenn nicht

$$\frac{n+h+1}{2} = n \quad \text{und} \quad \frac{k+1}{2} = k,$$

also $k = 1$ ist. Die erste Gleichung ist dann von selbst erfüllt, denn aus $k = 1$ folgt $h = n - k = n - 1$ und $n + h + 1 = 2n$.

Es ist also stets $k = 1$ und n gerade, d. h. die Relation (7) hat die Form

(10 S) $$2pA = A$$

wobei $2p - 1$ die S-Ordnung von A ist. Eine ganz ähnliche Überlegung gilt aber auch für die Multiplikation, sodaß auch die P-Ordnung aller Elemente einer endlichen Klasse stets ungerade ist und

(10 P) $$A^{2q} = A$$

gilt, wobei $2q-1$ die P-Ordnung von A ist.

Für Vollklassen, für die die schärfere Forderung IV′ gilt, muß außerdem $n = 2$ oder in (10) $p = q = 1$ sein. Zum Beweis betrachten wir wieder die Folge (9). In (8) setzen wir $k = 1$, $n = 2r$ und nehmen $\nu = 2r - 2$, dann folgt

$$A_{4r-2} = A_{2(2r-1)} = A_{2r-1}$$

oder

$$(2r - 1)\, A_2 = (2r - 1)\, A_1,$$

also wegen IV′

$$A_2 = A_1,$$

w. z. b. w. Es muß also $p = 1$, d. h. $n = 2$ sein. *In Vollklassen gibt es nur Elemente erster Ordnung*; für ein beliebiges Element A einer Vollklasse gilt stets

$$2A = A \text{ und } A^2 = A$$

und daher

(11) $$kA = A \text{ und } A^k = A$$

für jede positive ganze Zahl k. Selbstverständlich gilt auch die Umkehrung: *Enthält eine Klasse nur Elemente erster Ordnung (S-Ordnung bzw. P-Ordnung), so ist sie eine Vollklasse (S-Vollklasse bzw. P-Vollklasse).* Ist nämlich etwa $kA = kB$, so ist nach (11) $kA = A$ und $kB = B$, also auch $A = B$.

2. Besondere Klassen.

Wir versuchen zunächst eine Klasse $\mathfrak{K}_2$ mit nur zwei Elementen A und B zu konstruieren. Da die Ordnung eines Elementes jedenfalls nicht größer sein kann als die Zahl der Elemente der Klasse überhaupt, können hier beide Elemente nur von der Ordnung 1 sein, es muß also

(12) $$A + A = A,\ B + B = B,\ A.A = A,\ B.B = B$$

sein. *Jede Klasse von nur zwei Elementen ist eine Vollklasse.* Setzen wir

nun noch die beiden Verknüpfungen $A + B$ und $A \,.\, B$ fest, so ist das „Einmaleins" dieser Klasse bereits vollständig gegeben. Nun kann man entweder $A + B = A$ oder $A + B = B$ und $A \,.\, B = B$ oder $A \,.\, B = A$ setzen, wobei wir aber doch einen Unterschied zwischen Addition und Multiplikation machen und daher auf jeden Fall $A \,.\, B \neq A + B$ nehmen müssen. Wir setzen also

$$A + B = B,\ A \,.\, B = A; \tag{13}$$

da die andere Möglichkeit, $A + B = A$ und $A \,.\, B = B$ bloß auf eine Vertauschung von A und B hinausläuft und daher nichts wesentlich neues liefert, haben wir damit die allgemeinste Klasse von zwei Elementen aufgestellt.

Die Frage liegt nahe, ob es eine solche Klasse im Bereich der gewöhnlichen reellen oder komplexen Zahlen gibt, d. h. ob die Gleichungen (12) und (13) in diesem Bereich Lösungen haben. Die erste und dritte Gleichung (12) sind jedenfalls erfüllt durch $A = 0$, während die zweite und vierte Gleichung (12) dann eigentlich keine von 0 verschiedene Lösung mehr hat, wenn wir nicht die „Zahl" ∞ (unendlich) gleichberechtigt neben die Null stellen. Tun wir das, dann stehen die Gleichungen (12) und die erste Gleichung (13) durchaus im Einklang mit unseren gewöhnlichen Vorstellungen über das Rechnen mit dem Symbol ∞, während die zweite Gleichung (13) eben eine besondere Festsetzung über das sonst unbestimmte Produkt $0 \,.\, \infty$ beinhaltet. Wir bezeichnen im folgenden die Elemente der Klasse $\mathfrak{K}_2$ stets mit 0 und ∞, was natürlich keinerlei Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

In dieser und in jeder endlichen Klasse gibt es ein statistisches Beweisverfahren, das wir jetzt zum Nachweis zweier wichtiger Gesetze, die in der Klasse $\mathfrak{K}_2$ gelten, benützen wollen. Wir bezeichnen mit X, Y, Z ... beliebige Elemente aus $\mathfrak{K}_2$; das erste der erwähnten Gesetze ist dann das gewöhnliche oder *erste distributive Gesetz*

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z, \tag{14 S}$$

das zweite Gesetz entsteht daraus durch Vertauschung von Addition und Multiplikation und soll als *zweites distributives Gesetz* bezeichnet werden

$$X + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot (X + Z). \tag{14 P}$$

Das statistische Beweisverfahren besteht nun einfach darin, daß wir uns eine Tabelle anlegen, in der wir alle möglichen Wertekombinationen

des Tripels (X, Y, Z) zusammenstellen und dann die Relation (14) für diese Werte durch Ausrechnen bestätigen:

X	Y	Z	$X.(Y+Z)$	$X.Y+X.Z$	$X+Y.Z$	$(X+Y).(X+Z)$
0	0	0	$0.0=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0.0=0$
0	0	∞	$0.\infty=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$0.\infty=0$
0	∞	0	$0.\infty=0$	$0+0=0$	$0+0=0$	$\infty.0=0$
0	∞	∞	$0.\infty=0$	$0+0=0$	$0+\infty=\infty$	$\infty.\infty=\infty$
∞	0	0	$\infty.0=0$	$0+0=0$	$\infty+0=\infty$	$\infty.\infty=\infty$
∞	0	∞	$\infty.\infty=\infty$	$0+\infty=\infty$	$\infty+0=\infty$	$\infty.\infty=\infty$
∞	∞	0	$\infty.\infty=\infty$	$\infty+0=\infty$	$\infty+0=\infty$	$\infty.\infty=\infty$
∞	∞	∞	$\infty.\infty=\infty$	$\infty+\infty=\infty$	$\infty+\infty=\infty$	$\infty.\infty=\infty$

Es gilt also: *in jeder Klasse von nur zwei Elementen gelten die distributiven Gesetze (14).* Wir werden auf diese für verschiedene Anwendungen besonders wichtige Klasse $\mathfrak{K}_2$ im folgenden noch ausführlich zurückkommen.

Wir betrachten nun noch Klassen von drei Elementen und suchen zunächst eine, die keine Vollklasse ist, also mindestens ein Element dritter Ordnung enthält. Wir bezeichnen dieses Element mit A und es sei also[3]

$$A + A = 2A = B,\ 3A = C,\ 4A = A.$$

Dann wird

$$A + B = A + 2A = C,\ A + C = A + 3A = A,\ B + B = 2A + 2A = A,$$
$$B + C = 2A + 3A = 4A + A = A + A = B,$$
$$C + C = 3A + 3A = 4A + 2A = A + B = C.$$

Damit ist das Einmaleins wieder komplett, neben A ist auch B ein Element dritter S-Ordnung ($4B = 8A = A + A = B$), während C ein Element erster S-Ordnung ist.

Für die Multiplikation muß man nun ähnliche Festsetzungen treffen. Soll die betrachtete Klasse auch keine P-Vollklasse sein, so müssen auch zwei der drei Elemente von dritter P-Ordnung sein, also muß mindestens ein Element von dritter Ordnung existieren. Es sei A dieses Element, dann muß $A \cdot A = C$ sein, weil die Annahme $A \cdot A = B$ auf

[3] Die Annahme $3A = B$ führt auf einen Widerspruch mit (3S). In der Tat folgt dann $A + 2A = A + B = B$ und wegen $4A = A$ weiter $2A + 2A = B + B = A$, also ist $A + (A + B) = A + B = B$, aber $(A + A) + B = B + B = A$.

genau dieselben Verknüpfungen führen würde, die wir bei der Addition hatten, sodaß dann Addition und Multiplikation überhaupt nicht verschieden, die Elemente A, B und C, also gar nicht die Elemente einer Klasse wären. Nehmen wir aber $A^2 = C$, so muß $A^3 = B$ sein, wir haben also gegenüber der Addition nur B mit C zu vertauschen und erhalten $A \cdot A = C$, $A \cdot B = A$, $A \cdot C = B$, $B \cdot B = B$, $B \cdot C = C$, $C \cdot C = A$, womit das Einmaleins wieder vollständig ist.

Vollklassen mit drei Elementen gibt es mehrere. Wir haben zunächst sicher:

$2A = A$, $2B = B$, $2C = C$, $A^2 = A$, $B^2 = B$, $C^2 = C$. Die gemischten Produkte lasssen sich weitgehend willkürlich annehmen. Eine wichtige Festsetzung ist:

(15) $A + B = B$, $A + C = B + C = C$; $A \cdot B = A \cdot C = A$, $B \cdot C = B$.

Diese Klasse ist distributiv, wie wir gleich etwas allgemeiner zeigen werden. Dagegen ist die Klasse mit

$$A + B = A + C = B + C = C,\ A \cdot B = A \cdot C = B \cdot C = A$$

nicht distributiv, während die Annahme

$$A + B = C,\ B + C = A,\ C + A = B$$

auf einen Widerspruch mit (3 S) führt. Sicher ist, daß (15) die einzige distributive Klasse mit drei Elementen ist.

Wir erwähnen noch, daß wir diese Klasse im Bereich der gewöhnlichen reellen oder komplexen Zahlen folgendermaßen deuten können: Für A und C nehmen wir wieder die Zahlen 0 und ∞, während B eine beliebige, von 0 und ∞ verschiedene Zahl bedeuten soll. Die Relationen (15) bekommen dann einen ganz vernünftigen Sinn mit Ausnahme der letzten, die besagt, daß eine beliebige Zahl, mit ∞ multipliziert, eine beliebige Zahl als Produkt ergibt. Diese Festsetzung widerspricht jedenfalls jeder gewohnten Vorstellung über die Wirkung einer Multiplikation mit ∞. Wir werden aber später (Schluß von § 7) in der Lage sein, eine durchaus anschauliche physikalische Deutung für diese Klasse und somit auch für die letzte Gleichung (15) zu geben.

Wir betrachten nun noch allgemein eine Vollklasse aus n Elementen. Diese n Elemente denken wir uns willkürlich geordnet, also den ganzen Zahlen 1, 2, ..., n umkehrbar eindeutig zugeordnet und entsprechend dieser Zuordnung numeriert: A_1, A_2, ..., A_n. Und nun setzen wir fest, daß

(16) $$A_i + A_k = A_k,\ A_i \cdot A_k = A_i$$

sein soll, wenn $i \leqq k$ ist. Damit ist aber offenbar das ganze Einmaleins dieser Klasse gegeben. Diese Klasse ist distributiv, denn es gilt, wenn $i \leqq k \leqq l$ ist:

$$A_i (A_k + A_l) = A_i \cdot A_l = A_i,\ A_i A_k + A_i A_l = A_i + A_i = A_i$$
$$A_k (A_l + A_i) = A_k \cdot A_l = A_k,\ A_k A_l + A_k A_i = A_k + A_i = A_k$$
$$A_l (A_i + A_k) = A_l \cdot A_k = A_k,\ A_l A_i + A_l A_k = A_i + A_k = A_k$$

ferner

$$A_i + A_k A_l = A_i + A_k = A_k,\ (A_i + A_k)(A_i + A_l) = A_k \cdot A_l = A_k$$
$$A_k + A_l A_i = A_k + A_i = A_k,\ (A_k + A_l)(A_k + A_i) = A_l \cdot A_k = A_k$$
$$A_l + A_i A_k = A_l + A_i = A_l,\ (A_l + A_i)(A_l + A_k) = A_l \cdot A_l \cdot = A_l$$

Da damit alle möglichen Größenbeziehungen der Indizes erschöpft sind, gelten beide distributiven Gesetze in der Klasse (16) ganz allgemein.

Ferner gilt: *Jedes Restsystem nach einem ungeraden Modul ist eine S-Klasse.* Dabei sind natürlich für Summe und Produkt ebenfalls die Reste der in gewöhnlicher Weise ermittelten Summe bzw. des Produktes nach dem Modul m zu nehmen. Betrachten wir etwa das Restsystem nach einem geraden Modul $2k$, das aus den Zahlen 0, 1, ..., $2k-1$ besteht, so ist

$$k + k = 2k \equiv 0 \pmod{2k},$$

und somit in unserer Schreibweise

$$k + k = 0 + 0,$$

ohne daß aber $k = 0$ wäre. Die Forderung IV S ist also nicht erfüllt; die Restsysteme nach geraden Moduln sind keine Klassen in unserem Sinne. Ist der Modul dagegen ungerade, etwa gleich $2k + 1$, so besteht das Restsystem aus den Zahlen 0, 1, ..., $2k$; ist a dann eine beliebige Zahl dieses Restsystems, so ist entweder

$$2a \equiv 2a \pmod{2k + 1}$$

wenn $a \leqq k$ ist oder es ist

$$2a \equiv 2(a-k) - 1 \pmod{2k + 1},$$

d. h. wenn a das Restsystem in der obigen natürlichen Anordnung durchläuft, so durchläuft $2a$ zunächst die geraden Zahlen 0, 2, ..., $2k$ und dann die ungeraden Zahlen 1, 3, ..., $2k - 1$ des Restsystems, das sich also, nur in anderer Anordnung, reproduziert. Es ist also klar, daß eine mit IV S in Widerspruch stehende Beziehung hier nicht gelten

kann; daß ferner ein Restsystem keinesfalls eine P-Klasse sein kann, folgt daraus, daß für den beliebigen Modul m und $0 < k < m$ stets

$$(m - k)^2 = m^2 - 2mk + k^2 \equiv k^2 \text{ (mod. } m)$$

ist, d. h., daß in unserer Schreibweise stets

$$(m - k)^2 = k^2$$

ist, ohne daß allgemein $m - k = k$ wäre; die Forderung IV P ist also nicht erfüllt. Vollklassen kann es hier nicht geben, denn sind a und b beliebige Zahlen des Restsystems nach dem Modul m, so gilt stets

$$m \cdot a \equiv m \cdot b \equiv 0 \text{ (mod. } m)$$

also

$$m \cdot a = m \cdot b$$

nach unserer Schreibweise, ohne daß $a = b$ sein müßte. Die 0 ist immer ein Element erster S-Ordnung ($0 + 0 = 0$), die übrigen Elemente sind von der Ordnung m oder von kleinerer Ordnung, je nachdem sie zum Modul teilerfremd sind oder nicht; ist m eine Primzahl, so haben alle von Null verschiedenen Elemente die S-Ordnung m. Für $m = 3$ finden wir also wie in den allgemeinen Beispielen ein Element (0) von erster und zwei Elemente (1 und 2) von dritter S-Ordnung.

3. Polynome in der Klasse $\mathfrak{R}_2$.

Wir legen den folgenden Untersuchungen ausschließlich die durch die Relation (12) oder (13) vollständig beschriebene Klasse $\mathfrak{R}_2$ von nur zwei Elementen 0 und ∞ zugrunde, ohne daß wir dabei mit diesen Zeichen eine bestimmte Vorstellung verbinden müssen. Die Rechenregeln (12) und (13) schreiben wir uns nochmals auf:

(17 S) $$0 + 0 = 0,\ 0 + \infty = \infty + \infty = \infty$$

und

(17 P) $$0 \,.\, 0 = 0 \,.\, \infty = 0,\ \infty \,.\, \infty = \infty$$

In $\mathfrak{R}_2$ gelten die beiden distributiven Gesetze (14). Es sei x ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}_2$; dann gilt

(18 S) $$k \,.\, x = x$$

und

(18 P) $$x^k = x$$

für jede positive ganze Zahl k. Ferner gelten, wie man mittels (17) leicht nachrechnet, die Relationen

(19 S) $$0 + x = x, \quad \infty + x = \infty$$

und

(19 P) $$0 \,.\, x = 0, \quad \infty \,.\, x = x.$$

Wir betrachten Polynome in $\mathfrak{R}_2$, d. h., durch Addition und Multiplikation irgendwelcher Variabler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{R}_2$ (jedes dieser x_i kann also nur die Werte 0 oder ∞ annehmen) mit Hilfe von festen, ebenfalls aus $\mathfrak{R}_2$ entnommenen Koeffizienten gebildete Ausdrücke. Die Koeffizienten sind also entweder 0 und dann können die entsprechenden Glieder gleich weggelassen werden, oder sie sind ∞ und dann können wegen der zweiten Gleichung (19 P) die Koeffizienten weggelassen werden. Das Zeichen ∞ spielt ja gerade wegen der zweiten Gleichung (19 P) bei der Multiplikation die Rolle eines „Einheitselementes". Da wegen (18 P) alle höheren Potenzen der Variablen durch die erste Potenz ersetzt werden können, so wird

(20) $$f_1 = x$$

das allgemeinste Polynom in einer Variablen. Wir schreiben das allgemeinste Polynom in zwei Variablen zunächst einmal mit unbestimmten Koeffizienten an:

(21) $$f_2 = A \,.\, x \,.\, y + B \,.\, x + C \,.\, y + D.$$

Hier muß jedenfalls $D = 0$ sein, da sonst wegen der zweiten Gleichung (19 S) $f_2 = \infty$ für alle Werte von x, y wäre. Es sei nun $A = \infty$ und etwa auch $B = \infty$, sodaß die beiden ersten Glieder von (21) einfach $x \,.\, y + x$ sind. Unter Benützung von (19) folgt:

$$x \,.\, y + x = x \,.\, (y + \infty) = x \,.\, \infty = x,$$

d. h. aber, daß das Glied $x \,.\, y$ nur dann angeschrieben werden muß, wenn $B = C = 0$ ist. Wir erhalten also zwei Typen von Polynomen in zwei Variablen, nämlich

(22) $$f_{21} = x + y, \; f_{22} = x \,.\, y.$$

Im allgemeinen Fall von n unabhängigen Variablen gibt es, wie man leicht überlegt, mindestens n homogene Polynome, die mit den symmetrischen Grundfunktionen oder mit Teilen derselben (bei denen also einzelne Koeffizienten den Wert 0 und nicht ∞ haben) identisch sind und daneben noch eine Reihe inhomogene Polynome, bei denen aber niemals ein Glied in einem anderen Glied (desselben Polynoms) von höherem Grad als Faktor enthalten sein kann. Kommen nämlich in einem solchen inhomogenen Polynom zwei Glieder der Form $\varphi + \varphi \,.\, \psi$

vor, so kann man durch eine ganz analoge Überlegung wie oben mit den Variablen x und y zeigen, daß dieser Ausdruck durch φ allein ersetzt werden kann, d. h., daß stets

$$\varphi + \varphi \,.\, \psi = \varphi \tag{23}$$

ist. So können bei $n = 4$ neben den symmetrischen Grundfunktionen auch Ausdrücke wie $x \,.\, y \,.\, z + x \,.\, u + y \,.\, u + z \,.\, u$ vorkommen, während $x \,.\, y \,.\, z + x \,.\, y$ durch $x \,.\, y$ zu ersetzen ist.

4. Inverse Variable und Polynome. Subtraktion und Division.

Einer Variablen x aus $\mathfrak{R}_2$ kann man eine zweite Variable, die wir mit $\bar{x}$ bezeichnen wollen, so zuordnen, daß $\bar{x} = 0$ oder ∞ ist, je nachdem $x = \infty$ oder 0 ist. Für die Konstanten 0 und ∞ setzen wir fest, daß

$$\bar{0} = \infty, \quad \overline{\infty} = 0 \tag{24}$$

sein soll. Es wäre in diesem Zusammenhang recht naheliegend, etwa $\frac{1}{x}$ statt $\bar{x}$ zu schreiben, doch ziehen wir aus verschiedenen Gründen die letztere Schreibweise vor. x und $\bar{x}$ sind ein Sonderfall der im nächsten Paragraph noch allgemeiner zu betrachtenden gekoppelten Variablen. Erteilt man $\bar{x}$ (oder x) einen bestimmten Wert, so ist damit auch der Wert von x (oder $\bar{x}$) bestimmt. x und $\bar{x}$ heißen zueinander *invers* oder *reziprok*. Dieser Begriff läßt sich auf Polynome übertragen. Zu jedem Polynom f läßt sich ein zweites Polynom $\bar{f}$, das zu f *inverse* oder *reziproke Polynom* definieren, und zwar soll wieder $\bar{f} = 0$ oder $\bar{f} = \infty$ sein, je nachdem $f = \infty$ oder $f = 0$ ist.

Der damit eingeführte Begriff der inversen Polynome hat mit dem sonst in der Analysis verwendeten Begriff der inversen Funktion im Sinne von Umkehrfunktion nichts zu tun.

Zwischen zwei inversen Polynomen gelten die Beziehungen

$$f + \bar{f} = \infty \tag{25 S}$$

und

$$f \,.\, \bar{f} = 0, \tag{25 P}$$

ferner ist

$$\bar{\bar{f}} = f. \tag{26}$$

Die beiden Beziehungen (25) sind zueinander invers, d. h. überstreicht man beide Seiten von (25 S), so erhält man (25 P) unter Benützung von (27 S) und umgekehrt.

Zwei weitere für das Rechnen mit inversen Polynomen wichtige Formeln sind die folgenden:

(27 S) $$\overline{f+g} = \bar{f} \,.\, \bar{g}$$

und

(27 P) $$\overline{f \,.\, g} = \bar{f} + \bar{g}.$$

Auch diese Gleichungen sind zueinander invers. Wir beweisen sie am einfachsten wieder mittels einer Tabelle:

f	g	$\bar{f}$	$\bar{g}$	$f+g$	$f \,.\, g$	$\overline{f+g}$	$\bar{f} \,.\, \bar{g}$	$\overline{f \,.\, g}$	$\bar{f}+\bar{g}$
0	0	∞	∞	0	0	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	0	∞	0	0	0	∞	∞
∞	0	0	∞	∞	0	0	0	∞	∞
∞	∞	0	0	∞	∞	0	0	0	0

Die letzten vier Spalten enthalten den Nachweis der beiden Formeln (27), die für mehr als zwei Summanden oder Faktoren ganz analog gelten:

(28 S) $$\overline{\sum_{a=1}^{n} f_a} = \prod_{a=1}^{n} \bar{f}_a$$

und

(28 P) $$\overline{\prod_{a=1}^{n} f_a} = \sum_{a=1}^{n} \bar{f}_a$$

Es gilt der Satz: *Das inverse Polynom $\bar{f}$ eines Polynoms f in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist ein Polynom in den inversen Variablen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$.* Der Satz ist mittels (27) ohne weiteres zu beweisen. Z. B. ist

$$\overline{x \,.\, y \,.\, z} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z},$$

$$\overline{y \,.\, z + z \,.\, x + x \,.\, y} = \overline{y \,.\, z} \,.\, \overline{z \,.\, x} \,.\, \overline{x \,.\, y} =$$

$$= (\bar{y} + \bar{z}) \,.\, (\bar{z} + \bar{x}) \,.\, (\bar{x} + \bar{y}) = \bar{y} \,.\, \bar{z} + \bar{z} \,.\, \bar{x} + \bar{x} \,.\, \bar{y},$$

$$\overline{x + y + z} = \bar{x} \,.\, \bar{y} \,.\, \bar{z},$$

$$\overline{y \,.\, z + z \,.\, x} = (\bar{y} + \bar{z}) \,.\, (\bar{z} + x) = \bar{z} + \bar{x} \,.\, \bar{y},$$

usw. Zu beachten ist dabei auch (23). Die letzte Beziehung kann man auch in anderer Weise erhalten. Wegen

$$y \,.\, z + z \,.\, x = z \,.\, (x + y)$$

wird

$$\overline{y \,.\, z + z \,.\, x} = \bar{z} + \overline{x + y} = \bar{z} + \bar{x} \,.\, \bar{y}.$$

Bemerkt sei, daß sich dieser Begriff der Inversion auch auf Klassen mit mehr als zwei Elementen übertragen läßt, wenn wir z. B. unter $\overline{A}$, wenn A ein beliebiges Element der Klasse ist, jedes von A verschiedene Element der Klasse verstehen. Die einfachen Relationen (24) gelten aber nur in $\mathfrak{R}_2$. In der Vollklasse mit den Elementen $0, B$ (Beliebig), ∞ und den Relationen (15) mit $A = 0$, $C = \infty$ würde $\bar{0}$ entweder B oder ∞, $\overline{B}$ entweder 0 oder ∞ und $\overline{\infty}$ entweder 0 oder B bedeuten.

Es liegt nahe, nach den Umkehrungen der beiden Grundoperationen Addition und Multiplikation, also nach einer Subtraktion und Division zu fragen. Wir wollen diese Frage wenigstens für $\mathfrak{R}_2$ kurz diskutieren. Es seien f und g beliebige Variable (Polynome oder unabhängige Variable) in $\mathfrak{R}_2$. Wir fragen dann nach der Existenz von zwei anderen Variablen φ und ψ, die den Gleichungen

(29 S) $$f + \varphi = g$$

bzw.

(29 P) $$f \,.\, \psi = g$$

genügen. Wir stellen uns wieder eine Tabelle auf und finden:

f	g	φ	ψ
0	0	0	unbestimmt
0	∞	∞	existiert nicht
∞	0	existiert nicht	0
∞	∞	unbestimmt	∞

Wir schreiben

$$\varphi = g - f;$$

aber φ ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn $f = 0$ ist. Wir schreiben analog

$$\psi = \frac{g}{f};$$

aber ψ ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn $f \neq 0$, also $f = \infty$ ist. Daß die Division durch 0 ausgeschlossen ist, ist uns von den gewöhnlichen reellen und komplexen Zahlen her nichts Neues. Die Regel, daß man ∞ nicht subtrahieren darf, klingt wohl etwas

ungewohnt, aber das mag wohl daher kommen, daß man sonst entweder gar nicht oder ganz anders als hier mit ∞ rechnet. Im übrigen sind wirklich verboten nur die Subtraktion $0 - \infty$ und die Division $\frac{\infty}{0}$ während $\infty - \infty$ und $\frac{0}{0}$ „unbestimmte Formen" sind.

5. Gekoppelte Variable.

Die n Variablen in $\mathfrak{R}_2$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{30}$$

nennen wir *gekoppelt* oder kurz eine *Koppel* in $\mathfrak{R}_2$, wenn die Bedingungen

$$\Gamma = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \infty \tag{31}$$

und

$$x_i\, x_k = 0 \quad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{32}$$

bestehen.

Diese Bedingungen bedeuten, daß stets eine und nur eine der Variablen x_i den Wert ∞ hat, während die übrigen gleich 0 sind.

Wir nennen die mit Γ bezeichnete linke Seite von (31) die *Grenzfunktion* der Koppel (30). Da nach (32) alle gemischten Produkte der Variablen gleich 0 sind und die Summe aller Variablen den konstanten Wert ∞ hat, muß das allgemeinste Polynom in den Variablen x_i bei geeigneter Numerierung dieser Variablen die Form

$$f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_h, \quad h < n \tag{33}$$

haben, d. h., es muß aus einem Teil der Grenzfunktion (31) bestehen. Für das inverse Polynom $\bar{f}$ gilt

$$\bar{f}(x) = x_{h+1} + x_{h+2} + \ldots + x_n. \tag{34}$$

Nach der Definition der gekoppelten Variablen ist es unmittelbar klar, daß die beiden Funktionen (33) und (34) die Relationen (25) erfüllen; denn es ist ja $f + \bar{f} = \Gamma = \infty$ und wegen (32) auch $f \,.\, \bar{f} = 0$. Wegen

$$f + \bar{f} = \Gamma$$

können wir aber auch

$$\bar{f} = \Gamma - f$$

schreiben; diese Differenz ist wegen $\Gamma = \infty$ stets ausführbar, bestimmt aber $\bar{f}$ nicht eindeutig, sondern liefert zunächst einen Ausdruck der Form

$$\bar{f} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_h x_h + x_{h+1} + x_{h+2} + \ldots + x_n. \tag{35}$$

Erst die weitere Bedingung $f \,.\, \bar{f} = 0$ gibt aus (35) wegen $x^2_i = x_i$ und wegen (32)

$$f \,.\, \bar{f} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_h x_h,$$

und daraus

$$A_i = 0, \; (i = 1, 2, \ldots, h),$$

d. h., wir können $\bar{f}$ hier wirklich durch eine ganz normal aussehende Subtraktion $\Gamma - f$ bestimmen. Insbesondere ist

$$\bar{x}_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n. \tag{36}$$

Diese inversen Variablen $\bar{x}_i$ bilden die *inverse Koppel*; sie genügen den zu (31) und (32) inversen Bedingungen

$$\bar{x}_1 \,.\, \bar{x}_2 \,.\, \ldots \,.\, \bar{x}_n = 0 \tag{31'}$$

und

$$\bar{x}_i + \bar{x}_k = \infty \; (i \neq k, \, i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{32'}$$

die besagen, daß ein und nur ein $\bar{x}_i = 0$ ist, während alle anderen gleich ∞ sind[4].

Wir betrachten nun Systeme von verschiedenen Koppeln, beschränken uns aber der Einfachheit halber auf das System der drei Koppeln

$$\begin{aligned} &x_1, \, x_2, \, \ldots, \, x_p, \\ &y_1, \, y_2, \, \ldots, \, y_q, \\ &z_1, \, z_2, \, \ldots, \, z_r. \end{aligned} \tag{37}$$

Ihre Grenzfunktionen sind

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= x_1 + x_2 + \ldots + x_p = \infty, \\ \Gamma_y &= y_1 + y_2 + \ldots + y_q = \infty, \\ \Gamma_z &= z_1 + z_2 + \ldots + z_r = \infty. \end{aligned} \tag{38}$$

Als Grenzfunktion des Systems definieren wir

$$\Gamma = \Gamma_x \,.\, \Gamma_y \,.\, \Gamma_z = \sum_{i,k,l} x_i \, y_k \, z_l = \infty, \tag{39}$$

wobei sich die Summe Σ über alle $p\,q\,r$ Glieder des Produktes $\Gamma_x \,.\, \Gamma_y \,.\, \Gamma_z$ erstreckt. Natürlich gelten neben (38) auch die Relationen

$$x_i \, x_k = 0, \; y_h \, y_j = 0, \; z_l \, z_m = 0 \; (i \neq k, \, h \neq j, \, l \neq m). \tag{40}$$

Das allgemeinste Polynom in den Variablen (37) hat die Form

---

[4] Konsequenterweise sollten (31) und (32) natürlich mit (31 S) und (32 P) bezeichnet werden. Wir wollen jedoch hier ausnahmsweise aus Bequemlichkeit ein wenig inkonsequent bleiben.

$$f(x, y, z) = \sum'_{i,k,l} x_i y_k z_l \tag{41}$$

wobei Σ' einen Teil der Summe Σ von (39) umfaßt. Den Ausdruck (41) nennen wir die *Vollform* der Funktion $f(x, y, z)$. Eine solche Vollform, die stets homogen vom selben Grad ist wie die zugehörige Grenzfunktion (39), kann nun sicher nicht alle drei Faktoren Γ_x, Γ_y und Γ_z gleichzeitig enthalten. Läßt sich f aber in der Form darstellen

$$f(x, y, z) = \Gamma_x \cdot \varphi(y, z) + \psi(x, y, z)$$

so können wir wegen $\Gamma_x = \infty$

$$f(x, y, z) = \varphi(y, z) + \psi(x, y, z)$$

schreiben. Dieses Weglassen des Faktors Γ_x nennen wir „*Kürzen durch Γ_x*" und die rechte Seite der obigen Gleichung eine *gekürzte Form* der Funktion $f(x, y, z) \cdot \varphi$ kann unter Umständen noch durch Γ_y oder Γ_z, sicher aber nicht durch das Produkt $\Gamma_y \cdot \Gamma_z$ gekürzt werden. Führt man an der Vollform (41) alle möglichen Kürzungen aus, so gelangt man zu der *Normalform*. Wir zeigen nun, daß diese Normalform, die natürlich auch mit der Vollform selbst identisch sein kann, stets eindeutig bestimmt ist. Der Beweis dieses wichtigen Satzes liefert uns zugleich ein Verfahren zur Ermittlung der Normalform.

Wir gehen von der Vollform (41) aus und suchen alle Glieder von $f(x, y, z)$, die Γ_x als Faktor enthalten. Wir bezeichnen die Summe dieser Glieder, die dann keine der Variablen x_i mehr enthält, mit $f_1(y, z)$. Ferner suchen wir in (41) ebenso die Summe $f_2(z, x)$ aller Glieder, die Γ_y und — wieder in (41) — die Summe $f_3(x, y)$ aller Glieder, die Γ_z als Faktor enthalten. Ferner bezeichnen wir mit $f_0(x, y, z)$ die Summe aller Glieder von (41), die weder Γ_x, noch Γ_y oder Γ_z als Faktor enthalten. Dann können wir

$$f(x,y,z) = f_0(x,y,z) + \Gamma_x \cdot f_1(y, z) + \Gamma_y \cdot f_2(z,x) + \Gamma_z \cdot f_3(x,y) \tag{42}$$

schreiben. Wir haben bei der Ermittlung der Polynome f_0 bis f_3 zwar möglicherweise das eine oder das andere Glied von (41) mehrfach gezählt, was aber völlig belanglos ist. Wegen (38) können wir anstelle von (42)

$$f(x, y, z) = f_0(x, y, z) + f_1(y, z) + f_2(z, x) + f_3(x, y) \tag{43}$$

schreiben. Nun kann $f_1(y, z)$ noch Γ_y oder Γ_z (keinesfalls aber $\Gamma_y \cdot \Gamma_z$) als Faktor enthalten; wir verfahren mit f_1, f_2 und f_3 also ganz ähnlich wie oben mit f selbst und erhalten

$$(44) \qquad \begin{aligned} f_1(y,z) &= f_{01}(y,z) + \Gamma_y \cdot f_{12}(z) + \Gamma_z \cdot f_{13}(y), \\ f_2(z,x) &= f_{02}(z,x) + \Gamma_z \cdot f_{23}(x) + \Gamma_x \cdot f_{21}(z) \\ f_3(x,y) &= f_{03}(x,y) + \Gamma_x \cdot f_{31}(y) + \Gamma_y \cdot f_{32}(x). \end{aligned}$$

Die Polynome f_{ik} ($i = 0, 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$) enthalten nun sicher keine Faktoren Γ_x, Γ_y oder Γ_z mehr. Ferner ist

$$(45) \qquad f_{23} = f_{32},\ f_{31} = f_{13},\ f_{12} = f_{21}$$

und somit wegen (38) endgültig

$$(46) \qquad \begin{aligned} f(x,y,z) = f_0(x,y,z) &+ f_{01}(y,z) + f_{02}(z,x) + f_{03}(x,y) \\ &+ f_{23}(x) + f_{31}(y) + f_{12}(z) \end{aligned}$$

und das ist offenbar die gesuchte Normalform, deren Existenz und Eindeutigkeit damit bewiesen ist. Ist in (42) oder (43) $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, so ist $f(x, y, z) = f_0(x, y, z)$, d. h. die Vollform ist bereits die Normalform, Kürzungen sind nicht möglich.

Erwähnt sei noch, daß das zu (41) inverse Polynom $\bar{f}(x, y, z)$ in der Form

$$(47) \qquad \bar{f}(x,y,z) = \sum''_{i,k,l} x_i\, y_k\, z_l$$

geschrieben werden kann, wenn wir die Summe Σ'' über alle Glieder der Grenzfunktion (39) erstrecken, die in (41) nicht vorkommen. Es ist also wieder

$$f(x,y,z) + \bar{f}(x,y,z) = \Gamma = \infty$$

Der Beweis verläuft völlig analog zu dem Beweis der Formel (34).

6. Der Aussagenkalkül der algebraischen Logik.

Bezeichnet man Aussagen, also Sätze wie „der Tisch ist grün", „Herr X. geht spazieren", „$2 \times 2 = 4$" usw., mit kleinen lateinischen Buchstaben, so kann man gewisse einfache Verknüpfungen von Aussagen in symbolischer Form als Rechenoperationen mit diesen Symbolen anschreiben und man kann zeigen, daß diese Verknüpfungen dann eine Art Algebra bilden, die man als Aussagenkalkül bezeichnet.

Die einfachsten Verknüpfungen sind:

1. Die Negation $\bar{a}$ von a, gesprochen „nicht-a".
2. Die Disjunktion oder logische Summe $a + b$, gesprochen „a oder b".
3. Die Konjunktion oder das logische Produkt $a.\ b$, gesprochen „a und b" oder besser „sowohl a als auch b".

4. Die Äquivalenz oder logische Gleichheit $a = b$, gesprochen „a ist äquivalent b".[5]

Eine weitere in der Logik besonders wichtige Verknüpfung ist die Implikation, meist $a \supset b$ geschrieben und „a impliziert b" gesprochen, die aber mit $\bar{a} + b$ äquivalent ist und daher hier außer Betracht bleiben kann.

Jeder Aussage ist ein Wahrheitswert zugeordnet. Meist sagt man, eine Aussage a hat den Wahrheitswert 0, wenn sie falsch und den Wahrheitswert 1, wenn sie richtig ist. Wir ziehen es vor, ∞ statt 1 zu nehmen. Die Äquivalenz $a = b$ bedeutet nichts anderes als daß die Aussagen a und b denselben Wahrheitswert haben, also entweder beide wahr oder beide falsch sind.

Die Symbole a, b usw. des Aussagenkalküls sind also Variable, die nur die beiden Werte 0 und ∞ annehmen können. Diese beiden Werte selbst genügen aber auch hier, wie man sofort einsieht, den Forderungen I—IV von § 1 und somit ist der ganze Aussagenkalkül mit der Algebra in der Klasse $\mathfrak{K}_2$ völlig identisch.

Bemerkt sei noch, daß die obigen vier Verknüpfungen nicht voneinander unabhängig sind. So folgt z. B. aus (27 S) durch Überstreichen beider Seiten

$$f + g = \overline{\bar{f} \cdot \bar{g}}$$

wodurch die Summe auf die Negation und das Produkt zurückgeführt ist.

In derselben Weise wie diese „klassische" Aussagenlogik mit der Algebra in der Klasse $\mathfrak{K}_2$ identisch ist, führen die in der letzten Zeit des öfteren betrachteten mehrwertigen Logiken auf höhere Klassen. So ist die dreiwertige Logik der Modalitäten „notwendig", „möglich" und „unmöglich", identisch mit der Algebra der in § 2 betrachteten distributiven Klasse $\mathfrak{K}_3$ mit dem Einmaleins (15).

7. Die Algebra der elektrischen Schaltungen.

Wir müssen uns hier darauf beschränken, einen ganz kurzen Überblick über dieses wichtige Anwendungsgebiet zu geben und verweisen

[5] *Hilbert* und *Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik (Berlin 1928), nennen „a oder b" das Produkt, „a und b" die Summe von a und b. Natürlich ist diese Bezeichnungsweise, an der vielleicht das Wörtchen „und" schuld ist, völlig gleichberechtigt mit der von uns verwendeten. Es wäre immerhin zweckmäßig, sich auch hier über eine einheitliche Bezeichnung zu einigen. Bei der Anwendung auf die elektrischen Schaltungen bedeutet diese Vertauschung der Zeichen + und . einfach den Übergang vom Leitwert einer Verbindung zum Widerstand (§ 7).

wegen einer ausführlicheren Behandlung auf die in der Einleitung zitierte Arbeit von *O. Plechl* und dem Verfasser.

Jede elektrische Anlage besteht aus Stromquellen, Verbrauchern und, als Verbindungsglied zwischen diesen beiden, aus der „Schaltung", deren Aufgabe es ist, gewisse Gruppen von Verbrauchern wahlweise an gewisse Gruppen von Stromquellen anzuschließen oder sie von diesen abzuschalten, d. h. also, gewisse Strompfade herzustellen oder zu unterbrechen. Unter Stromquellen und Verbrauchern verstehen wir dabei alle jene elektrischen Maschinen und Apparate, in denen eine Energieumwandlung stattfindet; ob es sich dabei um eine Stromquelle oder um einen Verbraucher handelt, ist nur eine Vorzeichenfrage. Bei einem Verbraucher wird elektrische in andere Energie verwandelt: Motoren, Widerstände, die Primärseiten von Transformatoren verwandeln elektrische in mechanische Energie, in Wärme oder in magnetische Energie (genau genommen findet auch in den Motoren zuerst eine Umwandlung in magnetische Energie statt, die dann erst in mechanische umgesetzt wird).

Bei Stromquellen ist es umgekehrt: galvanische Elemente, Akkumulatoren, Generatoren, die Sekundärseiten der Transformatoren verwandeln chemische oder magnetische Energie in elektrische[6].

Den gegebenen Ausgangspunkt für die Konstruktion einer Schaltung bilden die Schaltbedingungen, die die Strompfade angeben, die durch die Schaltung herstellbar sein sollen. Stromquellen und Verbraucher sind als gegeben anzusehen. Mitunter ist auch vorgeschrieben, daß die Herstellung oder Lösung der Strompfade von bestimmten verschiedenen Stellen aus möglich sein soll, wofür die bekannte Wechselschaltung ein einfaches Beispiel ist: es soll ein Verbraucher, z. B. eine Glühlampe, von zwei oder mehr verschiedenen Stellen aus ein- oder ausgeschaltet werden können, eine Angelegenheit, die jedem von Stiegenhäusern oder von Vorzimmern her bekannt ist.

Wir setzen voraus, daß die Schaltungen nur aus idealen Leitern und idealen Isolatoren bestehen, sodaß der Leitwert zwischen je zwei Anschlußstellen (Klemmen) der Schaltung stets entweder gleich ∞ oder 0 ist, keinesfalls aber andere Werte annehmen kann.

Nach dem äußeren Eindruck definieren wir zunächst:

---

[6] Eine Sonderstellung nehmen die Gleichrichter (Ventile) ein, deren Leitwert von der Stromrichtung abhängt. Sie bleiben hier außer Betracht.

Eine Schaltung ist ein Kasten mit mehreren Handgriffen oder Antrieben, deren jeder mindestens zwei verschiedene Stellungen einnehmen kann und mit einer Anzahl Klemmen, an die die Stromquellen oder Verbraucher angeschlossen sind.

Diese Definition sagt gar nichts aus über den inneren Aufbau der Schaltung, also über den Inhalt des Kastens. Wir ergänzen zunächst unsere Definition:

Ein Schalter ist eine Schaltung mit einem einzigen Handgriff (Antrieb).

Ein prinzipieller Unterschied zwischen Schaltung und Schalter besteht überhaupt nicht, da man die Antriebe einer Schaltung stets durch einen einzigen Antrieb mit entsprechend vielen Stellungen steuern kann. So kann man z. B. bei einer Schaltung, die drei Antriebe mit je zwei Stellungen enthält, diese Antriebe durch einen einzigen Antrieb mit $2^3 = 8$ Stellungen mechanisch oder elektrisch steuern. In praktischer Hinsicht ist jedoch der Unterschied sehr bedeutungsvoll. Abgesehen von der Unübersichtlichkeit solcher Anlagen wird, wie schon erwähnt, manchmal auch gefordert, gewisse Handgriffe oder Antriebe von ganz verschiedenen Stellen aus betätigen zu können. Ferner wäre es in der Regel schon deshalb ungemein unpraktisch, alle Zustände einer Schaltung von einem Schalter aus herstellen zu wollen, weil dann mitunter das Durchlaufen sehr vieler Zwischenstellungen nötig wäre, um von einem Zustand in einen anderen zu gelangen, was einen ganz unerträglichen Zeitaufwand erfordern könnte.

Man kann nun sagen, daß jede Schaltung aus Schaltern zusammengesetzt ist, d. h. daß man den einen Kasten der Schaltung durch mehrere Kasten mit je einem Antrieb ersetzen kann, deren Klemmen zum Teil durch Leitungen miteinander verbunden sind. Dazu braucht man jedenfalls gerade so viel Schalter als an dem ursprünglichen Schaltungskasten Antriebe vorhanden waren. Da aber Schalter offenbar immer noch recht komplizierte Dinge sein können, muß man, um den Aufbau einer Schaltung richtig beschreiben und studieren zu können, noch wesentlich einfachere Bauelemente angeben.

Diese einfachsten Elemente sind die *Kontakte*. Darunter verstehen wir einen Schalter mit nur zwei Stellungen und zwei Klemmen, sodaß bei der einen Stellung der Leitwert zwischen den beiden Klemmen ∞, bei der anderen Stellung 0 ist. Jeder Schalter besteht dann aus einer Anzahl von Kontakten, die miteinander mechanisch gekuppelt sind und durch einen gemeinsamen Antrieb derart betätigt werden, daß

bei jeder Stellung des Antriebes gewisse Kontakte geschlossen, die übrigen offen sind. Kontakte, die bei allen Stellungen des Schalters offen sind, können weggelassen werden, Kontakte, die bei allen Stellungen geschlossen sind, können durch Leitungen ersetzt werden. Kontakte, die stets bei denselben Stellungen geschlossen oder offen sind, nennen wir *äquivalent*; wir sehen sie nicht als verschieden, sondern als mehrere Exemplare desselben Kontaktes an.

Zu dem eben erwähnten Begriff der *Leitung* wäre noch folgendes zu bemerken. Je zwei Punkte einer Schaltung, die stets dasselbe Potential haben, nennen wir ebenfalls äquivalent; je zwei Punkte einer Leitung haben stets dasselbe Potential und sind daher auch immer äquivalent. Je zwei äquivalente Punkte einer Schaltung können stets durch eine Leitung verbunden werden, ohne an der Wirkungsweise der Schaltung etwas zu ändern. Äquivalente Punkte sehen wir ebenso wie äquivalente Kontakte nicht als wesentlich verschieden an, d. h., wenn wir von verschiedenen Punkten und Kontakten sprechen, so sind dabei stets Punkte und Kontakte gemeint, die nicht äquivalent sind.

Erwähnt sei noch, daß die *Klemmen* nichts anderes als willkürlich ausgewählte Punkte einer Schaltung sind, die wir aber der Einfachheit halber stets als voneinander verschieden annehmen wollen. Die Klemmen sind die „äußeren" Punkte einer Schaltung, die „außen" am Kasten sichtbar sind. Die anderen Punkte liegen innen.

Wir betrachten nun zwei beliebige Punkte A und B einer Schaltung. Den Teil der Schaltung — es kann natürlich auch die ganze Schaltung selbst sein — der den Leitwert f zwischen den beiden Punkten A und B bestimmt, nennen wir die *Admittanz* $(A\,B)$ der Schaltung und f ihren Wert oder genauer ihren Leitwert. Mitunter verstehen wir unter Admittanz auch den Leitwert selbst, ähnlich wie ja auch die Worte Widerstand, Impedanz, Reaktanz usw. in doppeltem Sinn gebraucht werden und einmal das betreffende Gerät, das andere Mal den Wert des Widerstandes oder der Induktivität bedeuten.

Wir wollen übereinkommen, die Admittanz $(A\,B)$ mit dem Leitwert f stets so wie in Abb. 1 darzustellen.

Abb. 1.

Beispielsweise enthält die Brückenschaltung, Abb. 2, mit den fünf gegebenen Admittanzen a, b, c, d, e vier verschiedene Punkte A, B, C und D, von denen zwei, nämlich A und B als Klemmen ausgezeichnet

sind. In dieser Schaltung gibt es sechs resultierende Admittanzen, nämlich (AB), (AC), (AD), (BC), (BD) und (CD).

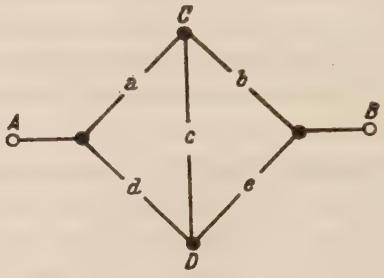

Abb. 2.

Es seien nun f und g zwei beliebige Admittanzen (Leitwerte), die irgendwelchen Schaltungen entnommen sein mögen. f und g sind also zwei Variable, die uur die Werte ∞ oder 0 annehmen können. Wir schalten die beiden Admittanzen einmal parallel (Abb. 3), einmal in Serie (Abb. 4) und stellen uns die resultierenden Admittanzen oder Leitwerte φ und ψ in einer Tabelle zusammen:

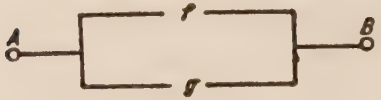

Abb. 3.

Abb. 4.

f	g	φ	ψ
∞	∞	∞	∞
∞	0	∞	0
0	∞	∞	0
0	0	0	0

Setzen wir

(48) $$\varphi = f + g, \quad \psi = f \cdot g,$$

so ist das genau das Einmaleins (12), (13) der Klasse $\mathfrak{R}_2$. Die Forderung I ist erfüllt, ebenso II und IV, wie unmittelbar klar ist. Aber auch III ist erfüllt, wie man leicht überlegt, wenn man drei Admittanzen parallel bzw. in Serie schaltet. *Die Algebra der elektrischen Schaltungen ist also identisch mit der Algebra in der Klasse* $\mathfrak{R}_2$.

Die grundlegende Bedeutung dieser Tatsache für die Schaltungstechnik geht einerseits aus unserer oben formulierten Aufgabenstellung

über den Aufbau einer beliebigen Schaltung aus den Kontakten hervor und andererseits aus dem Umstand, daß jede Schaltung aus den Kontakten durch eine Folge von Serien- und Parallelschaltungen in dem Sinn aufgebaut ist, daß ein neuer Kontakt entweder so hinzugefügt wird, daß er zwei verschiedene Punkte der Schaltung verbindet oder so, daß die Leitung zwischen zwei äquivalenten Punkten durchschnitten und hier der neue Kontakt eingesetzt wird.

Wir betrachten nun einen Schalter mit n Stellungen und nehmen an, daß in jeder Stellung ein und nur ein Kontakt geschlossen ist[7]. Wir wollen solche Schalter „einfache" Schalter nennen. Sie lassen sich stets als sogenannte „Umschalter" mit n Stellungen, n (verschiedenen) Kontakten und $n+1$ Klemmen darstellen (Abb. 5). Von den $\binom{n+1}{2}$ Admittanzen sind aber nur jene interessant, die den Punkt A_0 enthalten. Alle anderen haben den festen Wert 0. Nicht einfache Schalter lassen sich stets durch Parallelschalten und Koppeln (siehe unten) von einfachen Schaltern herstellen. Wir denken uns im einfachen Schalter die Stellungen und Kontakte so numeriert, daß in der i-ten Stellung auch der i-te Kontakt geschlossen ist. Die Admittanz (den Leitwert) des i-ten Kontaktes bezeichnen wir mit x_i, sodaß beim Umschalter gemäß Abb. 5 $(A_0\, A_i) = x_i$ ist. Diese n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilden dann eine Koppel (§ 5). In der Tat hat stets eine dieser Variablen den Wert ∞, weil der entsprechende Kontakt geschlossen ist, während alle anderen den Wert 0 haben (es ist stets *nur* ein Kontakt geschlossen). Durch Serienschaltung von zwei Kontakten x_i und x_k erkennt man unmittelbar, daß, wie schon erwähnt, $(A_i\, A_k) = x_i \,.\, x_k = 0$ ist für alle i, k mit $i \neq k$. Es gelten somit die beiden für eine Koppel charakteristischen Bedingungen (31) und (32); die linke Seite von (31) nennen wir die *Grenzfunktion* des betrachteten (einfachen) Schalters.

Abb. 5.

Wir schalten h der n Kontakte $(h < n)$ parallel und betrachten die resultierende Admittanz $f(x)$. Bei geeigneter Numerierung, d. h. wenn die Kontakte 1 bis h parallel geschaltet werden, ist $f(x)$ durch (33) gegeben.

Es seien zwei einfache Schalter mit gleich viel, etwa n Stellungen gegeben; die Leitwerte der Kontakte seien x_i bzw. y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

[7] Im Einklang mit der oben getroffenen Festsetzung zählen mehrere äquivalente Kontakte dabei aber nur als ein einziger Kontakt.

Wir können die Antriebe der beiden Schalter mechanisch so koppeln, daß stets beide Schalter in derselben Stellung stehen. Das Ergebnis ist ein nicht einfacher Schalter. Hier können wir nur bei einem der beiden einfachen Schalter die Numerierung wieder so wählen, daß in der i-ten-Stellung der Kontakt i geschlossen ist; bei dem zweiten Schalter können wir das im allgemeinen nicht machen; ist es doch möglich, so ist $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und die beiden Schalter sind *identisch* und entsprechende Kontakte äquivalent. Schalten wir diese äquivalenten Kontakte alle parallel oder in Serie, so entsteht ein Schalter, der in elektrischer Hinsicht völlig gleichwertig ist mit jedem der ursprünglichen einfachen Schalter, was nichts anderes ist, als die technische Deutung der Relationen $2x_i = x_i$ und $x_i^2 = x_i$ vgl. (11). In Worten: Serien- und Parallelschaltungen identischer Admittanzen f lassen sich durch je eine einzige Admittanz f ersetzen.

Auch (34) läßt sich in einfacher Weise deuten und führt zu einem technisch wichtigen Begriff. Wir denken uns wie oben an einem einfachen Schalter die ersten h Kontakte parallel geschaltet, schalten jetzt aber auch noch die restlichen $n-h$ Kontakte ebenfalls untereinanderparallel. Die beiden resultierenden Admittanzen (Abb. 6, $n=5$, $h = 2$) sind

Abb. 6.

$$(A_0\, A_1) = f(x),\ (A_0\, A_2) = \bar{f}(x);$$

Wir nennen sie *inverse* oder *reziproke Admittanzen*. $f + \bar{f}$ bedeutet, daß auch diese beiden noch parallel geschaltet werden; d. h. aber dann nichts anderes, als daß alle n Kontakte unseres Schalters parallel geschaltet sind und da ein Kontakt voraussetzungsgemäß stets geschlossen ist, hat die resultierende Admittanz stets den Leitwert ∞, d. h., es ist

$$f + \bar{f} = \infty.$$

Nach dem bisher Gesagten dürfte es keine Schwierigkeiten bereiten, auch die übrigen, im allgemeinen Teil der Untersuchung über die Klasse $\mathfrak{R}_2$ aufgestellten Formeln, insbesondere die beiden distributiven Gesetze, die Formeln (27) und die Angaben über die Subtraktion und Division schaltungstechnisch zu deuten.

Wir betrachten nun eine Schaltung, die aus drei einfachen Schaltern mit p, q und r Stellungen bestehen möge, ferner aus gewissen Leitungen, die die Klemmen der Kontakte dieser drei Schalter untereinander

und mit gewissen weiteren Klemmen verbinden, an die dann die Stromquellen und Verbraucher angeschlossen werden. Die Leitfähigkeiten der Kontakte sind dann durch die drei Koppeln (37) gegeben. Es gilt der fundamentale Satz:

Jede Admittanz einer solchen Schaltung ist durch einen Ausdruck der Form (41) gegeben.

In der Tat stellt jedes Glied der Grenzfunktion (39), die wir als Grenzfunktion jeder Schaltung bezeichnen, die aus den drei Schaltern oder Koppeln (37) aufgebaut ist, einen durch entsprechende Wahl der Leitungen und bei geeigneten Stellungen der Schalter *möglichen* Strompfad einer solchen Schaltung dar. Man kann aber leicht überlegen, daß auch die Umkehrung gilt, d. h., daß jeder Strompfad der Schaltung durch ein Glied von (39) oder durch eine Summe von solchen Gliedern darstellbar ist. Sind nämlich A und B die beiden (verschiedenen) Punkte der Schaltung, die die gesuchte Admittanz bestimmen, so ist jeder Strompfad, der von A nach B (oder umgekehrt von B nach A) führt und alle drei Schalter berührt, durch ein Glied von (39) darstellbar; kommen aber Strompfade vor, die nicht alle drei Schalter berühren, sondern z. B. nur die Schalter x und y, aber nicht den Schalter z, so gibt ein solcher Strompfad zunächst ein Glied der Form $x_i\, y_k$, das man wegen (38) auch in der Form

$$x_i\, y_k\, \Gamma_z = \sum_{l=1}^{r} x_i\, y_k\, z_l$$

schreiben kann; ein solcher Strompfad ist also durch eine Summe von Gliedern der Vollform (41) darstellbar. Strompfade, die keinen der drei Schalter berühren, können nicht vorkommen, da sonst die beiden Punkte A und B äquivalent wären. Da nun die Admittanz (A, B) aus einer Parallelschaltung solcher Strompfade bestehen muß, hat sie die Form (41).

Von der Vollform gelangt man durch das in § 5 beschriebene Kürzungsverfahren zur Normalform der betrachteten Admittanz und diese stellt bereits eine sehr einfache technische Ausführungsform der gesuchten Schaltung oder wenigstens eines Teiles derselben dar. Weitere Vereinfachungen lassen sich nur durch Herausheben von Faktoren erzielen, die in mehreren Gliedern auftreten. Man wird diese Herausheben stets so ausführen, daß die Gesamtzahl der schließlich angeschriebenen Kontakte möglichst klein ist. Diese Zahl ist jedenfalls

dann ein Minimum, wenn kein Kontakt öfters als einmal angeschrieben ist (*reduzierte Form*). Die Verallgemeinerung dieser Überlegungen auf mehr als drei Schalter liegt auf der Hand.

Eine Schaltung mit n Klemmen für Stromquellen und Verbraucher wird völlig beschrieben sein durch die Angabe der $\binom{n}{2}$ Admittanzen zwischen je zwei Klemmen; unter Umständen wird man jedoch schon mit einer wesentlich geringeren Zahl das Auslangen finden. Hat eine Schaltung nur zwei Klemmen, dann gibt es nur eine einzige Admittanz, die die Schaltung völlig beschreibt. Dieser einfachste Fall ist auch praktisch einer der häufigsten. Es handelt sich dabei um eine Stromquelle und um einen Verbraucher; bei Gleich- oder bei Einphasenstrom kann man dann wie in Abb. 7, den Stromkreis über eine weitere, die Stromquelle mit dem Verbraucher verbindende Leitung schließen oder aber, und das gilt ganz allgemein auch für Mehrphasensysteme, z. B. für Drehstrom, es ist die Schaltung f entsprechend oft auszuführen (bei Gleich- oder Einphasenstrom also zweimal, bei Drehstrom dreimal, Abb. 8). Die entsprechenden Schalter in den einzelnen Leitern werden in letzterem Falle miteinander mechanisch gekuppelt.

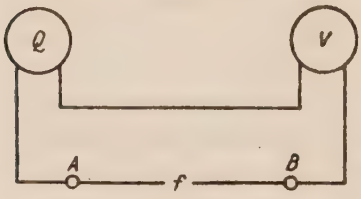

Abb. 7.

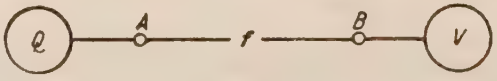

Abb. 8.

Wir betrachten ein Beispiel. Es sei die Vollform

$$\begin{aligned} f = {} & x_1 y_1 z_1 + x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_1 y_2 z_2 + \\ & + x_2 y_1 z_1 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1 + \\ & + x_3 y_1 z_1 + \qquad\qquad x_3 y_2 z_1 + x_3 y_2 z_2 \end{aligned} \tag{49}$$

vorgelegt, die einen dreistelligen Schalter x und zwei zweistellige Schalter y und z enthält. Die zugehörige Normalform ist

$$f = x_1 + z_1 + x_2 y_1 + x_3 y_2. \tag{50}$$

Hier kommt kein Kontakt öfter als einmal vor, die Form ist bereits reduziert. Die Zahl der Strompfade ist gegen (49) von 10 auf 4, die Zahl

der Kontakte von 30 auf 6 zurückgegangen. Die praktische Ausführung der Schaltung zeigt Abb. 9.

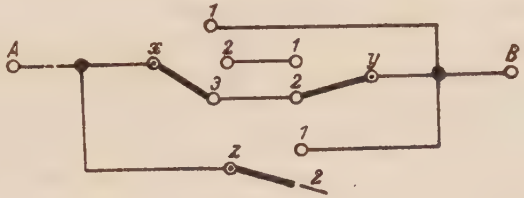

Abb. 9.

Sind mehrere Verbraucher $V_1, V_2, \ldots, V_n$ über Schaltungen (Admittanzen) $f_1, f_2, \ldots, f_n$ an eine Stromquelle, z. B. an ein Netz angeschlossen, so kann man eine gesamte Admittanz

$$\Phi = f_1 V_1 + f_2 V_2 + \ldots + f_n V_n \tag{51}$$

einführen und mit Φ ebenso rechnen, wie mit einer höheren komplexen Zahl mit den n Einheiten $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Enthalten hier die f_i einen gemeinsamen Faktor φ, ist also $f_i = \varphi . \varphi_i$, so kann man statt (51) auch

$$\Phi = \varphi (\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2 + \ldots + \varphi_n V_n) \tag{52}$$

schreiben, was praktisch wieder eine erhebliche Vereinfachung bedeuten kann.

Wir kommen nun noch zur technischen Deutung der inversen Polynome im allgemeinen Fall, die wir an dem obigen Beispiel erläutern wollen. Bilden wir etwa das zu (49) inverse Polynom, so finden wir wegen (47) sofort

$$\bar{f} = x_2\, y_2\, z_2 + x_3\, y_1\, z_2, \tag{53}$$

denn das sind gerade die beiden Glieder, die in (49) gegenüber der Grenzfunktion fehlen. Denselben Ausdruck (53) bekommt man auch durch Überstreichen von (50) und Ausrechnen der rechten Seite gemäß den Formeln (28), (32) und (36). Die Schaltung entsprechend (53) oder besser entsprechend der durch Herausheben vereinfachten Form

$$\bar{f} = (x_2\, y_2 + x_3\, y_1)\, z_2$$

wird in der Schaltungstechnik als *Kehrschaltung* von (50) bezeichnet. Sie ist in Abb. 10 dargestellt, aus der man entnimmt, daß ein an B

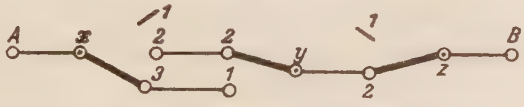

Abb. 10

angeschlossener Verbraucher von einer bei A angeschlossenen Stromquelle stets bei den Stellungen der Schalter x, y und z angespeist ist,

wo der entsprechende Verbraucher in Abb. 9 nicht angespeist ist und umgekehrt.

Wir betrachten einige einfache Beispiele.

1. Es sollen zwei Verbraucher (Glühlampen) A und B von zwei verschiedenen Stellen aus- oder eingeschaltet werden können. Mit jedem der beiden Schalter x und y sollen also die Zustände 0 (aus), A, B unabhängig von der Stellung des anderen Schalters herstellbar sein. Es ist klar, daß man dazu dreistellige Schalter braucht, sodaß die Grenzfunktion der Schaltung die Form

$$\Gamma = \sum_{i,k=1}^{3} x_i\, y_k \tag{54}$$

oder ausführlicher, wenn wir zur Abkürzung $x_i \,.\, y_k = ik$ setzen,

$$\begin{array}{lccccccccc} \Gamma = & 11 & + & 12 & + & 13 & + & 21 & + & 22 & + & 23 & + & 31 & + & 32 & + & 33. \\ & 0 & & A & & B & & A & & B & & 0 & & B & & 0 & & A \end{array} \tag{55}$$

Wir haben dabei unter jedem Glied angedeutet, welcher Verbraucher bei der betreffenden Stellung der beiden Schalter angespeist ist. Die Zuordnung ist fast zwangsläufig, wie man leicht überlegt, und völlig zwangsläufig, wenn man verlangt, daß die drei Zustände 0, A, B in dieser Reihenfolge beim jedesmaligen Weiterdrehen eines der beiden Schalter einander zyklisch ablösen sollen. Wir erhalten die beiden Vollformen für die Verbraucher A und B

$$f_A = x_1\, y_2 + x_2\, y_1 + x_3\, y_3 \tag{56}$$

und

$$f_B = x_1\, y_3 + x_2\, y_2 + x_3\, y_1 \tag{57}$$

Diese Formen sind beide bereits reduziert. Vereinfachungen durch Herausheben sind weder an (56) noch an (57) möglich. Die Abb. 11

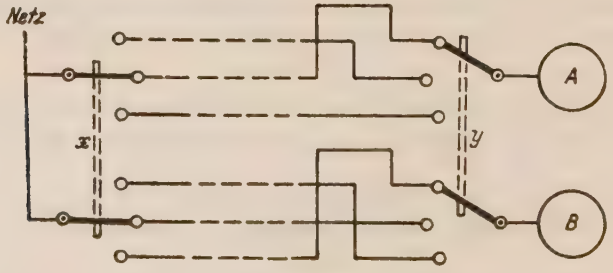

Abb. 11.

zeigt die entsprechende Schaltung in der Stellung $x_2\, y_1$. Bildet man jedoch gemäß (51) den Ausdruck Φ, so folgt

$$(58)\quad \begin{aligned}\Phi &= f_A\,A + f_B\,B = \\ &= x_1\,(y_2\,A + y_3\,B) + \\ &+ x_2\,(y_1\,A + y_2\,B) + \\ &+ x_3\,(y_3\,A + y_1\,B)\end{aligned}$$

und schon diese einfache Umformung gibt eine beträchtliche Vereinfachung der ganzen Schaltung, wie aus Abb. 12 zu entnehmen ist.

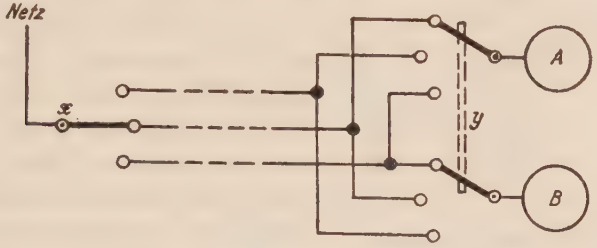

Abb. 12.

Man erspart beim Schalter a drei Kontakte und vor allem ist die Zahl der Verbindungsleitungen zwischen x und y auf die Hälfte reduziert.

2. Es seien drei Verbraucher A, B, C gegeben, die man wahlweise an das Netz schalten können soll, jedoch mit der Einschränkung, daß es nicht möglich sein soll, mehr als zwei dieser Verbraucher gleichzeitig einzuschalten. Man kann dieser Forderung etwa dadurch genügen, daß beim Versuch, zu zwei bereits eingeschalteten Verbrauchern den dritten dazuzuschalten, alle drei Verbraucher abgeschaltet werden. Wir versuchen die Aufgabe zunächst mit drei zweistelligen Schaltern zu lösen. Die Grenzfunktion ist

$$(59)\quad \begin{aligned}\Gamma = {} & 000 + 001 + 010 + 011 + 100 + 101 + 110 + 111, \\ & 0 \quad C \quad B \quad B.C \quad A \quad A.C \quad A.B \quad 0\end{aligned}$$

wobei wieder $x_i\,y_k\,z_l = ikl$ gesetzt ist, die Schalterstellungen aber jetzt mit 0 und 1 bezeichnet sind und die geforderten Zustände unter die entsprechenden Glieder von (59) geschrieben sind. Wir erhalten die drei Vollformen

$$(60)\quad f_A = x_1\,y_0\,z_0 + x_1\,y_0\,z_1 + x_1\,y_1\,z_0,$$

$$(61)\quad f_B = x_0\,y_1\,z_0 + x_0\,y_1\,z_1 + x_1\,y_1\,z_0,$$

$$(62)\quad f_C = x_0\,y_0\,z_1 + x_0\,y_1\,z_1 + x_1\,y_0\,z_1.$$

Hier lassen sich sowohl Kürzungen als auch Heraushebungen vornehmen, und zwar wird

$$(63)\quad \Phi = (y_0 + z_0)\,x_1A + (z_0 + x_0)\,y_1B + (x_0 + y_0)\,z_1C.$$

Hier können wir aber wegen (40) in jedem Klammerausdruck ein Glied hinzufügen, nämlich der Reihe nach x_0, y_0 und z_0; der damit entstehende gemeinsame Faktor $\varphi = x_0 + y_0 + z_0$ kann herausgehoben werden und wir erhalten gemäß (52) weiter

$$\Phi = (x_0 + y_0 + z_0)\,(x_1 A + y_1 B + z_1 C). \tag{64}$$

Die zugehörige Schaltung zeigt Abb. 13; die Kontakte x_0, x_1 und ebenso y_0, y_1 und z_0, z_1 lassen sich zu je einem Umschalter zusammenfassen, sodaß man schließlich die einfache und elegante Lösung Abb. 14 erhält.

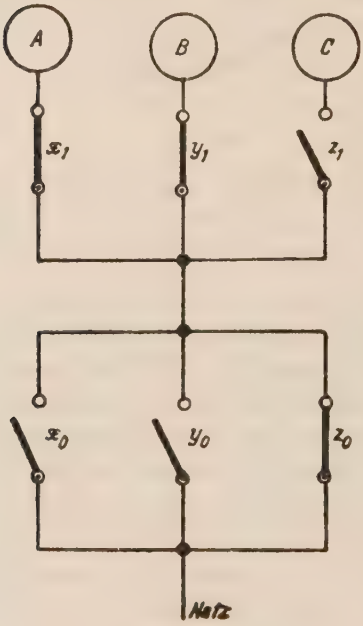

Abb. 13.

3. Wir modifizieren das Beispiel 2, indem wir verlangen, daß beim Versuch, zu zwei bereits eingeschalteten Verbrauchern den dritten dazuzuschalten, stets der Verbraucher C abgeschaltet werden soll (d. h., daß C überhaupt nicht eingeschaltet werden können soll, wenn A und B bereits angespeist sind, dagegen soll C abgeschaltet werden, wenn A und C oder B und C eingeschaltet waren und B bzw. A dazugeschaltet werden). Die Form (59) bleibt dieselbe, nur kommt unter das letzte Glied 111 statt 0 jetzt $A.B$. Wir erhalten die drei Vollformen

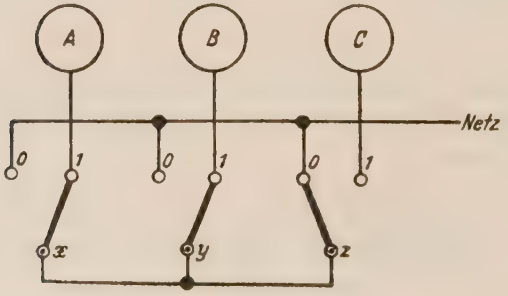

Abb. 14.

$$f_A = x_1\,y_0\,z_0 + x_1\,y_0\,z_1 + x_1\,y_1\,z_0 + x_1\,y_1\,z_1, \tag{65}$$

$$f_B = x_0\,y_1\,z_0 + x_0\,y_1\,z_1 + x_1\,y_1\,z_0 + x_1\,y_1\,z_1, \tag{66}$$

(67) $$f_C = x_0\, y_0\, z_1 + x_0\, y_1\, z_1 + x_1\, y_0\, z_1$$

und daraus die reduzierten Formen

(68) $$f_A = x_1,\ f_B = y_1,\ f_C = (x_0 + y_0)\, z_1,$$

also für die gesamte Schaltung

(69) $$\Phi = x_1 A + y_1 B + (x_0 + y_0)\, z_1 C.$$

Ein Herausheben ist hier nicht mehr möglich, die Schaltung ist in Abb. 15 dargestellt.

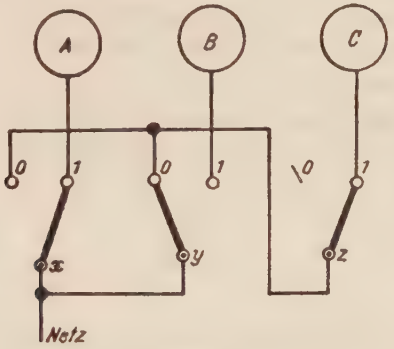

Abb. 15

Wir beschließen unsere Ausführungen mit zwei ergänzenden Bemerkungen. Die erste betrifft die sogenannten *vermaschten Schaltungen*, die ein sehr wichtiges und interessantes Kapitel der Schaltungstechnik bilden. Es handelt sich dabei um einen Fall, den man mit den bisher entwickelten Rechenmethoden nicht völlig erfassen kann. Es gibt nämlich Schaltungen, und zwar ist die Brückenschaltung der Abb. 2 ein Beispiel dafür, bei denen sich an der Schaltung selbst mehr Vereinfachungen durchführen lassen als an dem algebraischen Ausdruck. Versucht man nämlich, diese Schaltung anzuschreiben, so erhält man für die Admittanz $(A\ B)$

(70) $$f = ab + de + ace + dcb.$$

Einige Heraushebungen lassen sich hier noch durchführen, z. B.

$$f = a\,(b + ce) + d\,(e + cb)$$

oder

$$f = (a + cd)\ b + (d + ac)\ e.$$

Aber hier sind die Admittanzen b, c und e bzw. a, c und d noch je zweimal angeschrieben, obwohl sie in der Schaltung selbst nur einmal vorkommen.

Ein unter gewissen Einschränkungen allgemein gültiges Kriterium für vermaschte Schaltungen besteht darin, daß bei gegebener Stromrichtung, z. B. von A nach B in Abb. 2, eine Admittanz (Kontakt) vorkommt, die je nach dem Strompfad, dem sie angehört, in verschiedener Richtung vom Strom durchflossen wird. Das ist in Abb. 2 bei der die Brücke bildenden Admittanz c der Fall, die im Strompfad $a\,c\,e$ von oben nach unten, im Strompfad $d\,c\,b$ von unten nach oben vom Strom durchflossen wird. Schon im einfachsten Fall, wo a, b, c, d, e Kontakte sind, zeigt es sich, daß es nicht möglich ist, eine reduzierte Form anzuschreiben, in der kein Kontakt öfter als einmal vorkommt. Methoden zur Behandlung der vermaschten Schaltungen sind von *O. Plechl* bereits weitgehend ausgearbeitet, aber noch nicht veröffentlicht worden. Nur als Beispiel erwähne ich, daß unsere Brückenschaltung durch folgendes dreieckige Schema dargestellt werden kann:

$$\begin{array}{cccc} A & 0 & a & d \\ & B & b & e \\ & & C & c \\ & & & D \end{array}$$

hier stehen in der Hypotenuse die sämtlichen verschiedenen Punkte der Schaltung, im Schnitt der i-ten Zeile und k-ten Spalte ($k > i$) die den i-ten- und k-ten-Punkt verbindende Admittanz. Man liest daraus sofort die möglichen Strompfade ab, die z. B. von A nach B führen: $A\,a\,C\,b\,B$, $A\,d\,D\,e\,B$, $A\,a\,C\,c\,D\,e\,B$ und $A\,d\,D\,c\,C\,b\,B$. Läßt man die Punkte weg und verbindet die übrig bleibenden Produkte durch $+$-Zeichen, so ergibt sich sofort die Form (70). Das obige Schema ist aber eine Darstellung der Schaltung, in der kein Kontakt öfter als einmal angeschrieben ist; sie hat außerdem den Vorteil, daß man alle übrigen Admittanzen $(A\,C)$, $(B\,C)$ usw. in derselben einfachen Weise ablesen kann.

Die zweite Bemerkung betrifft die bereits angekündigte schaltungstechnische Deutung der in § 2 betrachteten distributiven Vollklasse $\mathfrak{R}_3$ mit dem Einmaleins (15). Während wir bisher Schaltungen behandelt haben, in denen nur die Leitwerte ∞ und 0 vorkamen, wollen wir jetzt einmal Schaltungen betrachten, die beliebige Widerstände als Schaltelemente enthalten, ohne daß wir uns aber auf eine quantitative Bestimmung dieser Widerstände einlassen; es gibt jetzt also drei Arten von Schaltelementen: Leiter mit dem Leitwert ∞, Isolatoren mit dem Leitwert 0 und Widerstände mit dem Leitwert B (beliebig), wobei aber B

weder gleich 0 noch gleich ∞ ist. Man überzeugt sich leicht, daß die Algebra dieser Schaltungen mit der Algebra in der erwähnten Klasse $\mathfrak{R}_3$ identisch ist. In (15) setzen wir also $A = 0$ und $C = \infty$; dann ist auch die letzte Gleichung, die uns dort durch die etwas überraschende Aussage $B \cdot \infty = B$ auffiel, durchaus im Einklang mit der gar nicht überraschenden Tatsache, daß ein beliebiger Widerstand vom Leitwert B, mit einem Leiter in Serie geschaltet, den resultierenden Leitwert B ergibt.

Über eine Abbildung der Speere einer Ebene.

Von
Rudolf Inzinger, Wien.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 1. September 1945.)

Am 28. Jänner 1938 habe ich in einem Vortrag in der Wiener Mathematischen Gesellschaft „Über Laguerre'sche Geometrie in der Mannigfaltigkeit der konzentrischen Kegelschnitte" berichtet[1]. Ich habe in diesem Vortrag gezeigt, daß sich *zwei zu einander duale Modelle der Laguerre'schen Kreisgeometrie* ergeben, wenn man in geeigneter Weise die Speere einer Ebene Π auf die zu einem festen Punkt o symmetrischen Punkte- oder Geradenpaare einer Ebene π abbildet. Es entsprechen nämlich in dieser Abbildung $\mathfrak{A}$ den Zykeln der Ebene Π die als Punktorte bzw. Geradenorte aufzufassenden Kegelschnitte von π mit o als gemeinsamer Mitte[2].

Die Geometrie der konzentrischen Kegelschnitte verdient insofern selbständiges Interesse, als dabei viele Beziehungen zwischen Kegelschnitten eine neue Deutung, nämlich im Sinne der Laguerre'schen Geometrie erfahren.

Die Laguerre'sche Kreisgeometrie kann bekanntlich vermöge der *zyklographischen Abbildung*[3] $\mathfrak{Z}$ versinnlicht werden als pseudoeuklidische Geometrie in einem projektiven R_3, dessen Metrik durch einen reellen uneigentlichen Kegelschnitt C bestimmt wird, wobei die Speere

---

[1] An der Veröffentlichung der Ergebnisse dieses Vortrages war ich bisher durch eine mehr als 5½ Jahre dauernde ununterbrochene Kriegsdienstleistung, sowie durch andere widrige Umstände verhindert, deren Ausschaltung nicht im Bereiche der mir gegebenen Möglichkeiten lag. Vgl. hierzu die Ankündigung im ersten Satz meiner Arbeit „Einige Bemerkungen über Eilinien", Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, math.-nat. Abt. IIa, 147 (1938).

[2] In der in 1) genannten Arbeit habe ich diese Abbildung zur Herleitung einiger Sätze über Mittelpunktseilinien verwendet.

[3] Vgl. darüber *E. Müller*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, II. Bd. „Die Zyklographie", herausgeg. von *J. Krames*, Leipzig 1929.

und Zykel von Π auf die Tangentialebenen und Tangentialkegel von C abgebildet werden.

Diese pseudoeuklidische Raumgeometrie kann daher auch als Bild der Laguerre'schen Geometrie in der Mannigfaltigkeit der konzentrischen Kegelschnitte betrachtet werden. Dieser Zusammenhang wird vermittelt durch die Abbildung $\mathfrak{B}$, die sich aus den Abbildungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}$ zusammensetzt. In ihr entsprechen den Kegelschnitten von π mit o als Mitte die Punkte des R_3 als Spitzen der Tangentialkegel an C.

Herr Hohenberg[4] hat mehrfach die Mannigfaltigkeit der koaxialen Kegelschnitte untersucht, die er als *Kegelschnittbund* bezeichnet. Ein solcher Kegelschnittbund stellt eine Teilmannigfaltigkeit aus der Gesamtheit der konzentrischen Kegelschnitte dar und wird vermöge der Abbildung $\mathfrak{B}$ auf die Punkte einer Ebene des R_3 abgebildet. Diese Abbildung der Kegelschnitte eines Bundes auf die Punkte einer Ebene stimmt mit der von Herrn Hohenberg seinen Untersuchungen zugrunde gelegten Abbildung überein.

In der vorliegenden Note wird vorerst nur die Abbildung $\mathfrak{A}$ der Speere der Ebene Π auf die zu einem festen Punkt o symmetrischen Geradenpaare der Ebene π eingehend besprochen, da sie die Grundlage für weitere Untersuchungen über die Laguerre'sche Geometrie in der Mannigfaltigkeit der konzentrischen Kegelschnitte darstellt, über die in einer weiteren Mitteilung berichtet werden soll.

Es seien h, φ und H, Φ polare Speerkoordinaten in den Ebenen π bzw. Π. h bzw. H sind dann die vorzeichenbegabten Abstände der Speere von den Koordinatenanfangspunkten o bzw. O, während φ bzw. Φ die modulo 2π bestimmten Winkel derselben gegen die Polarachsen bedeuten. Durch die Gleichungen

$$H = h^2, \Phi = 2\varphi \tag{1}$$

wird sodann jedem Speer (h_0, φ_0) von π eindeutig ein Speer $(H = h_0^2, \Phi = 2\varphi_0)$ von Π zugeordnet, während offenbar jedem Speer (H_0, Φ_0) von Π die vier Speere $(h = \pm\sqrt{H_0}, \varphi = \frac{\Phi_0}{2}\ (\pi))$ von π entsprechen, die sich paarweise ergänzen und zwei nicht orientierten Geraden t_1 und t_2 angehören, die zu o symmetrisch sind. Im folgenden wird ein solches Geradenpaar mit t bezeichnet und erforderlichenfalls zwischen den

[4] *F. Hohenberg*, „Apolarität und Schließungsprobleme bei Kegelschnitten", Monatsh. f. Math. u. Phys. 50 (1941), p. 111 und „Über die Kegelschnitte mit gemeinsamen Hauptachsen", Deutsche Math. 6 (1941), p. 530.

beiden Geraden des Paares durch t_1 und t_2 unterschieden. Der dem Geradenpaar t von π entsprechende Speer von Π möge mit T bezeichnet werden.

Das dem reellen Speer T von Π entsprechende Geradenpaar t von π ist reell, oder konjugiert komplex, je nachdem T vom Koordinaten-Ursprung O einen positiven oder negativen Abstand besitzt. Für einen durch O gehenden Speer T von Π fällt das entsprechende Geradenpaar t von π ersichtlich in eine Gerade $t_1 = t_2$ durch o zusammen.

Werden zwei ergänzende Speere T und T' von Π betrachtet, dann entsprechen diesen vermöge $\mathfrak{A}$ die Geradenpaare $t\,(t_1, t_2)$ und $t'\,(t_1', t_2')$ von π, die als *assoziiert* bezeichnet werden sollen. Sind die Speere T und T' reell, dann ist von den assoziierten Geradenpaaren t und t' stets eines reell, während das andere konjugiert komplex ist.

Der *Umorientierung eines Speeres* von Π entspricht also in π der *Übergang von einem Geradenpaar zu seinem* assoziierten. Sind i_1 und i_2 die isotropen Geraden durch den Ursprung o und ist t ein zu o symmetrisches Geradenpaar, dann schneidet dieses die isotropen Geraden i_1 und i_2 in zwei zu o symmetrischen Punktepaaren, die durch ein weiteres zu o symmetrisches Geradenpaar t' verbunden werden können. t' ist dann das zum Geradenpaar t assoziierte Geradenpaar und umgekehrt.

Zwischen den Polarkoordinaten H, Φ bzw. h, φ und den *homogenen Koordinaten* $(U_0 : U_1 : U_2 : U_3)$, bzw. $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$ der Speere von Π bzw. π besteht bekanntlich der Zusammenhang

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = -H : \cos\Phi : \sin\Phi : 1, \quad [U_1^2 + U_2^2 - U_3^2 = 0] \qquad (2)$$

bzw.

$$u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = -h : \cos\varphi : \sin\varphi : 1, \quad [u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0].$$

Bei Beachtung der Abbildungsgleichungen (1) folgt nun daraus

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = -u_0^2 : u_1^2 - u_2^2 : 2u_1 u_2 : u_3^2,$$

oder wegen $u_3^2 = u_1^2 + u_2^2$

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = -u_0^2 : u_1^2 - u_2^2 : 2u_1 u_2 : u_1^2 + u_2^2. \qquad (3)$$

In dieser Proportion stehen links die homogenen Speerkoordinaten $(U_0 : U_1 : U_2 : U_3)$ der Ebene Π, während rechts die homogenen Koordinaten $(u_0 : u_1 : u_2)$ der nicht orientierten Geraden von π aufscheinen. Aus (3) entnimmt man nun neuerdings, daß vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$, jedem Speer $(U_0 : U_1 : U_2 : U_3)$ von Π ein Paar zu o symmetrischer Geraden $(\pm u_0 : u_1 : u_2)$ von π zugeordnet ist und umgekehrt.

Während die Abbildungsgleichungen (1) bloß die Abbildung der *anisotropen Speere* von Π vermitteln, so erkennt man nun bei Beachtung von (3), daß auch jedem *eigentlichen isotropen Speer* ($U_3 = 0$) von Π, vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ in π ein *Paar zu o symmetrischer eigentlicher isotroper Geraden* ($u_1^2 + u_2^2 = 0$) zugeordnet wird. Insbesondere entspricht dem *uneigentlichen Speer* (1:0:0:0) von Π in π die als zu o symmetrisches Geradenpaar aufzufassende *uneigentliche Gerade* (1:0:0).

Die Mannigfaltigkeit der (eigentlichen und uneigentlichen) Speere der Ebene Π bildet bekanntlich ein sogenanntes[5] *Jonquière'sches Gebiet zweiter Ordnung, erster Art*, das daher in adäquater Weise durch das *Study'sche System pseudohomogener Koordinaten*[6] (σ_{00}; σ_1, σ_2) dargestellt werden kann, welches der Äquivalenzforderung

$$(\sigma_{00};\ \sigma_1,\ \sigma_2) = (\lambda^2\,\sigma_{00};\ \lambda\,\sigma_1,\ \lambda\,\sigma_2)$$

genügt, wobei $\lambda \neq 0$ sein soll und das Tripel (0; 0, 0) auszuschließen ist. Diese Koordinaten stehen zu den gewöhnlichen homogenen Koordinaten ($U_0 : U_1 : U_2 : U_3$) der Speere von Π in der Beziehung

$$U_0 : U_1 : U_2 : U_3 = \sigma_{00} : \sigma_2^2 - \sigma_1^2 : -2\,\sigma_1\,\sigma_2 : -(\sigma_1^2 + \sigma_2^2). \tag{4}$$

Bei Beachtung von (3) folgt daraus, daß zwischen den homogenen Geradenkoordinaten ($u_0 : u_1 : u_2$) von π und den pseudohomogenen Koordinaten (σ_{00}; σ_1, σ_2) der Speere von Π der Zusammenhang

$$(\sigma_{00};\ \sigma_1,\ \sigma_2) = (u_0^2;\ u_1,\ u_2) \tag{5}$$

besteht. *Die Mannigfaltigkeit der zu o symmetrischen Geradenpaare erweist sich demnach gleichfalls als ein Jonquière'sches Gebiet zweiter Ordnung, erster Art. Die Abbildung $\mathfrak{A}$ zwischen diesen beiden Gebieten kommt nun in der Weise zustande, daß die pseudohomogenen Koordinaten der Speere von Π als Koordinaten der zu o symmetrischen Geradenpaare von π gedeutet werden.*

Aus (3) folgt bei Weglassung der Koordinate U_3

$$U_0 : U_1 : U_2 = -u_0^2 : u_1^2 - u_2^2 : 2u_1\,u_2, \tag{6}$$

wodurch eine *quadratische Geradentransformation* zwischen den Ebenen Π und π bestimmt ist.

---

[5] *H. Mohrmann*, Über die automorphen Kollineationsgruppe des rationalen Normalkegels n. Ordnung, Rend. d. Circ. Math. di Palermo, 31 (1. Sem. 1911), p. 172—174.

[6] *W. Blaschke*, Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der euklidischen Ebene, Monatsh. f. Math. u. Phys. 21 (1910), p. 49.

Es sei K eine algebraische Kurve n-ter-Klasse von Π und

$$F(U_0, U_1, U_2) = 0 \tag{7}$$

sei ihre Gleichung in den homogenen Geradenkoordinaten. Wird auf diese Kurve die quadratische Geradentransformation (6) angewendet, dann ergibt sich in π eine zu o symmetrische Kurve k von $2.n$-ter-Klasse, die durch die Gleichung

$$F(-u_0^2, u_1^2 - u_2^2, 2u_1 u_2) = f(u_0, u_1, u_2) = 0$$

bestimmt ist.

Wird die Kurve K aber als *orientierbar* vorausgesetzt, dann kann die Gleichung (7) derselben in der Form[7]

$$F_1^2(U_0, U_1, U_2).[U_1^2 + U_2^2] - F_2^2(U_0, U_1, U_2) = 0 \tag{8}$$

geschrieben werden, woraus bei Beachtung von $U_3^2 = U_1^2 + U_2^2$

$$[F_1(U_0, U_1, U_2,).U_3 + F_2(U_0, U_1, U_2)]. \tag{9}$$
$$.[F_1(U_0, U_1, U_2).U_3 - F_2(U_0, U_1, U_2)] = 0$$

folgt.

Die Kurve K kann demnach als von zwei *Speerkurven* K' und K'' überdeckt aufgefaßt werden. Setzt man

$$F_1(-u_0^2, u_1^2 - u_2^2, 2u_1u_2) = f_1(u_0, u_1, u_2), F_2(-u_0^2, u_1^2 - u_2^2, 2u_1u_2) = f_2(u_0, u_1, u_2),$$

dann ergibt sich, wegen (6) aus (8), die Gleichung

$$[f_1(u_0, u_1, u_2)(u_1^2 + u_2^2) + f_2(u_0, u_1, u_2)].$$
$$[f(u_0, u_1, u_2).(u_1^2 + u_2^2) - f_2(u_0, u_1, u_2)] = 0 \tag{10}$$

der entsprechenden Kurve k von π, die von der Klasse $2.n$ ist und in zwei getrennte und nicht orientierte Kurven n-ter-Klasse k' und k'' zerfällt, von denen jede zu o symmetrisch ist. Da sich die Gleichung (10) auch aus (9) durch Anwendung von (3) ergibt, so ist nun unmittelbar klar, daß die Kurven k' und k'' von π den orientierten Kurven K' und K'' von Π in der Abbildung $\mathfrak{A}$ entsprechen. Die Kurven k' und k'' mögen als *assoziiert* bezeichnet werden, da die Tangentenpaare der einen zu den Tangentenpaaren der anderen assoziiert sind. Zusammenfassend ergibt sich somit der folgende Sachverhalt.

Vermöge der quadratischen Geradentransformation (6) *entspricht jeder algebraischen Kurve n-ter-Klasse K von* Π *eine Kurve* $2.n$*-ter-Klasse k von* π*, die in zwei assoziierte Kurven n-ter-Klasse k' und k'' zerfällt, sofern K orientierbar ist und damit als von zwei Speerkurven K' und K'' überdeckt aufgefaßt werden kann. Die Kurven k' und k'' entsprechen den Speerkurven K' und K'' in der Abbildung* $\mathfrak{A}$.

---

[7] *G. Loria*, Spezielle alg. und transz. ebene Kurven, Leipzig 1902, p. 365.

In der Abbildung $\mathfrak{A}$ entsprechen den isotropen Speeren von Π die zu o symmetrischen isotropen Geradenpaare von π. Es werden daher auch die *Scharen konfokaler Speerkurven von Π auf die Scharen konfokaler zu o symmetrischer Kurven von π abgebildet.* Sind X, Y bzw. x, y, rechtwinkelige Punktkoordinaten in Π bzw. π, dann entsprechen sich die Brennpunkte dieser Kurvenscharen in der durch die Gleichungen

$$X = \frac{x^2 - y^2}{2}, \quad Y = x\,y$$

vermittelten Abbildung.

Den *Zykeln (orientierten Kreisen)* von Π entsprechen als Speerkurven zweiter Klasse vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ in π nicht orientierte Kurven zweiter Klasse, die zu o symmetrisch sind, also *Kegelschnitte mit o als Mitte.*

In den homogenen Speerkoordinaten $(U_0 : U_1 : U_2 : U_3)$ ist ein Zykel K von Π festgelegt durch die Gleichung

$$c_0\,U_0 + c_1\,U_1 + c_2\,U_2 + c_3\,U_3 = 0, \tag{11}$$

worin die Koeffizienten $(c_0 : c_1 : c_2 : c_3)$ als Koordinaten der Zykel von Π anzusehen sind. Diese Gleichung stellt zugleich die Bedingung für die Berührung eines Zykels $(c_0 : c_1 : c_2 : c_3)$ mit einem Speer $(U_0 : U_1 : U_2 : U_3)$ dar.

Durch $c_0 \neq 0$ sind die *eigentlichen Zykel* gekennzeichnet, für die X, Y die rechtwinkeligen Koordinaten der Zykelmitte und R den Zykelradius bedeuten. Bei Beachtung von (2) gilt sodann

$$X = \frac{c_1}{c_0}, \; Y = \frac{c_2}{c_0}, \; R = \frac{c_3}{c_0}. \tag{12}$$

Als *uneigentliche Zykel* dagegen werden jene Zykel bezeichnet, die den uneigentlichen Speer $(1 : 0 : 0 : 0)$ berühren. Sie sind, wegen (11), durch $c_0 = 0$ gekennzeichnet und erweisen sich als die Paare getrennter oder zusammenfallender Parallelspeerbüschel.

Aus (11) ergibt sich vermöge (4) die Gleichung

$$c_0\,\sigma_{00} - (c_1 + c_3)\,\sigma_1^2 - 2\,c_2\,\sigma_1\,\sigma_2 + (c_1 - c_3)\,\sigma_2^2 = 0$$

eines Zykels K von Π bzw. der entsprechenden Kurve k von π in den pseudohomogenen Koordinaten $(\sigma_{00}; \sigma_1, \sigma_2)$. Daraus folgt bei Beachtung von (5)

$$c_0\,u_0^2 - (c_1 + c_3)\,u_1^2 - 2\,c_2\,u_1\,u_2 + (c_1 - c_3)\,u_2^2 = 0, \tag{13}$$

ersichtlich die Gleichung eines Kegelschnittes k von π mit o als Mitte. Man erkennt, daß *konzentrische Zykel* von Π auf *konfokale Kegelschnitte*

von π abgebildet werden. Insbesondere entsprechen den als Nullzykel aufzufassenden *Punkten* ($c_3 = 0$, $c_0 \neq 0$) von Π die *gleichseitigen Hyperbeln* von π mit o als Mitte.

Sind $(a_{00} : a_{11} : a_{12} : a_{22})$ die durch die Gleichungsform

$$a_{00}\, u_0^2 + a_{11}\, u_1^2 + 2\, a_{12}\, u_1\, u_2 + a_{22}\, u_2^2 = 0$$

erklärten Koordinaten der Kegelschnitte k von π mit o als Mitte, dann gilt bei Beachtung von (13)

$$a_{00} : a_{11} : a_{12} : a_{22} = c_0 : -(c_1 + c_3) : -c_2 : (c_1 - c_3), \tag{14}$$

wodurch die Abbildung $\mathfrak{A}$ als *Abbildung der Zykel K der Ebene Π auf die als Geradenmannigfaltigkeiten aufzufassenden Kegelschnitte k von π mit o als Mitte* erklärt wird.

Für die Potenz D eines Zykels K von Π bezüglich O folgt vermöge (12) und (14)

$$D = \frac{a_{12}^2 - a_{11}\, a_{12}}{a_{00}^2}.$$

Der Kegelschnitt k ist also eine *Ellipse (bzw. ein nullteiliger Kegelschnitt)* oder eine *Hyperbel*, je nachdem der Ursprung O *innerhalb* oder *außerhalb* des Zykels K liegt. Liegt der Ursprung O aber *auf* dem Zykel K, dann zerfällt der Kegelschnitt k in ein Paar $k(k_1, k_2)$ zu o *symmetrischer Strahlbüschel* k_1 und k_2. Insbesondere entspricht dem *Ursprung* O von Π, aufgefaßt als Nullzykel, in π das *doppelt zählende Strahlbüschel* mit o als Scheitel. Für *uneigentliche Zykel* ($c_0 = 0$), also für die Paare (getrennter oder zusammenfallender) Parallelspeerbüschel der Ebene Π folgt aus (14) $a_{00} = 0$. In der Ebene π ergeben sich daher die Paare (getrennter oder zusammenfallender) Parallelstrahlbüschel. Es gilt somit der folgende Satz.

Vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$, entsprechen den eigentlichen Zykeln von Π in der Ebene π die als Strahlorte aufzufassenden Kegelschnitte mit o als Mitte und deren Ausartungen in Paare zu o symmetrischer oder in o zusammenfallender Strahlbüschel. Die uneigentlichen Zykel von Π werden auf Paare getrennter oder zusammenfallender Parallelstrahlbüschel von π abgebildet.

Von besonderem Interesse sind in der Laguerre'schen Geometrie der Ebene Π die Richtungskurven dritter und vierter Klasse, die als *Hyperzykel* bezeichnet werden. Die Gleichungen dieser Kurven in den pseudohomogenen Speerkoordinaten $(\sigma_{00};\ \sigma_1,\ \sigma_2)$ lauten[8]:

[8] *W. Blaschke*, a. a. O., p. 51.

$$\sigma_{00} \cdot f_1(\sigma_1, \sigma_2) + f_3(\sigma_1, \sigma_2) = 0, \tag{15}$$

bzw.

$$\sigma_{00}^2 \cdot f_0 + \sigma_{00} \cdot f_2(\sigma_1, \sigma_2) + f_4(\sigma_1, \sigma_2) = 0, \tag{16}$$

worin f_0 eine Konstante und die fi $(i = 1, 2, 3, 4)$ homogene Formen vom Grade i in den Veränderlichen (σ_1, σ_2) bedeuten. *Vermöge der Abbildung* $\mathfrak{A}$, *entsprechen somit den Hyperzykeln der Ebene* Π *in der Ebene* π, *die zu o symmetrischen Kurven dritter und vierter Klasse*, für deren Gleichungen aus (15) und (16) bei Beachtung von (5)

$$u_0^2 \cdot f_1(u_1, u_2) + f_3(u_1, u_2) = 0,$$

bzw.

$$u_0^4 \cdot f_0 + u_0^2 \cdot f_2(u_1, u_2) + f_4(u_1, u_2) = 0$$

folgt.

Sind ξ, η, ζ die rechtwinkeligen Koordinaten der eigentlichen Punkte eines projektiven R_3, dann wird die *zyklographische Abbildung* $\mathfrak{Z}$ der Zykel der Ebene Π auf die Punkte dieses R_3 vermittelt durch Gleichungen

$$\xi = X, \eta = Y, \zeta = R.$$

Bei Beachtung von (12) und (14) folgt daraus

$$a_{00} : a_{11} : a_{12} : a_{22} = 1 : -(\xi + \zeta) : -\eta : (\xi - \zeta), \tag{17}$$

wodurch die *Abbildung* $\mathfrak{B}$ *der Kegelschnitte von* π *mit o als Mitte auf die Punkte des* R_3 bestimmt wird

Durch $c_2 = 0$ ist jene zweiparametrige Teilmannigfaltigkeit der Kegelschnitte von π mit o als Mitte gekennzeichnet, deren Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Eine solche Kegelschnittmannigfaltigkeit wird von Herrn Hohenberg als *Kegelschnittbund* bezeichnet[9]. Aus den Abbildungsgleichungen (17) erkennt man nun sofort, daß die Kegelschnitte dieses Bundes vermöge der Abbildung $\mathfrak{B}$ auf die Punkte der Koordinatenebene $\eta = 0$ des R_3 abgebildet werden. Die vollkommene Übereinstimmung mit der von Herrn Hohenberg angegebenen Abbildung wird durch die Ausübung der Ähnlichkeitstransformation

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\xi \quad -\zeta \\ \eta_1 &= \quad -2\eta \\ \zeta_1 &= \quad \xi \quad -\zeta \end{aligned}$$

erzielt. Aus (17) folgt jetzt

$$a_{00} : a_{11} : a_{22} = 1 : \xi_1 : \zeta_1,$$

[9] *F. Hohenberg*, a. a. O., p. 111.

was zur Folge hat, daß den Kegelschnitten des Bundes jene Punkte der Ebene $\eta_1 = 0$ zugeordnet werden, deren rechtwinkelige Koordinaten ξ_1, ζ_1 mit den Halbachsenquadraten der Kegelschnitte des Bundes übereinstimmen.

Die von Herrn Hohenberg betrachtete Abbildung erweist sich demnach als ein Sonderfall der Abbildung $\mathfrak{B}$, insofern diese nicht auf die gesamte Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte von π mit o als Mitte, sondern bloß auf eine zweiparametrige Teilmannigfaltigkeit daraus angewendet wird.

Gegeben seien in der Ebene Π die eigentlichen Zykel K und L, die von ihren gemeinsamen Tangentialspeeren T und T' in den Punkten P, P' und Q, Q' berührt werden. Die absoluten Beträge der Strecken $|PQ| = |P'Q'| = \mathfrak{T}$ stellen dann die *Tangentialentfernung* des Zykelpaares K, L dar. In der Ebene π ergibt sich sodann, vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$, das Kegelschnittpaar k, l, das von den gemeinsamen und zu o symmetrischen Tangentenpaaren $t(t_1, t_2)$ und $t'(t_1', t_2')$ in den zu o symmetrischen Punktepaaren (P_1, P_2), (Q_1, Q_2), (P_1', P_2') und (Q_1', Q_2') berührt wird. Die Flächeninhalte der Dreieckspaare

$$|OP_1Q_1\,OP_2Q_2\,O| = |OP'_1Q'_1\,OP'_2Q'_2\,O| = \mathfrak{t}$$

können als Drehmomente der Berührungsstrecken $P_1Q_1 = P_2Q_2$ bzw. $P_1'Q_1' = P_2'Q_2'$ um O gedeutet werden. Demgemäß wird daher $\mathfrak{t}$ als das *Tangentialmoment* des Kegelschnittpaares k, l bezeichnet.

Es zeigt sich nun, daß zufolge der Abbildung $\mathfrak{A}$ die *Tangentialentfernung* $\mathfrak{T}$ *des Zykelpaares* K, L *mit dem Tangentialmoment* $\mathfrak{t}$ *des entsprechenden Kegelschnittpaares* k, l *übereinstimmt.* Für das Quadrat der Tangentialentfernung eines Zykelpaares K, L von Π findet man bei Beachtung von (12) und (14) die Gleichung

$$(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2-(Z_1-Z_2)^2= \\ =\frac{(a_{00}b_{12}-a_{12}b_{00})^2-(a_{00}b_{11}-a_{11}b_{00})(a_{00}b_{22}-a_{22}b_{00})}{a_{00}^2\,b_{00}^2},$$

worin der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck als das Quadrat des Tangentialmomentes eines Kegelschnittpaares k, l von π gedeutet werden kann.

Die Flächen $OP_1Q_1\,OP_2Q_2\,O$, bzw. $OP'_1Q'_1\,OP'_2Q'_2\,O$ arten aus, wenn die gemeinsamen Tangentenpaare t und t' der Kegelschnitte k, l zu gemeinsamen Asymptoten derselben werden. Dies ist der Fall, wenn

von den gemeinsamen Tangentialspeeren T und T' der Zykel K, L einer, oder beide durch 0 gehen.

Die Tangentialentfernung eines Zykelpaares K, L von Π ist gegenüber Dilatationen invariant. Die Dilatationen transformieren aber jeden Zykel von Π in die dazu konzentrischen Zykel und bewirken daher vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ in π die Transformationen eines Kegelschnittes mit o als Mitte in die dazu konfokalen Kegelschnitte. Daraus folgt z. B., daß *zwei Scharen konfokaler Kegelschnitte mit gemeinsamer Mitte o in einem Parallelenbüschel zu o symmetrischer Geradenpaare gleiche Tangentialmomente bestimmen.*

Die Abbildung $\mathfrak{A}$ stellt eine Berührungstransformation dar, was zur Folge hat, daß auch *die Tangentialentfernung irgend eines Kurvenpaares K, L von Π mit dem Tangentialmoment des entsprechenden Paares k, l zu o symmetrischer Kurven von π übereinstimmt.* Unmittelbar klar wird diese Tatsache auch durch die nachfolgende Überlegung.

Werden Ableitungen nach Φ durch Punkte und solche nach φ durch Striche angezeigt, dann folgt aus (1)

$$\dot{H} = h \,.\, h'.$$

Für konstantes h, φ bzw. H, Φ folgt daraus

$$\Delta \dot{H} = h \,.\, \Delta h'. \tag{18}$$

Hier steht links vom Gleichheitszeichen die Tangentialentfernung $\Delta\dot{H}$ eines Kurvenpaares K, L der Ebene Π, während $\Delta h'$ die Tangentialentfernung des entsprechenden Kurvenpaares k, l der Ebene π bedeutet. Es stellt daher die rechte Seite der Gleichung (18) das Tangentialmoment des Kurvenpaares k, l von π dar.

Die Deutung der Gleichung (18) versagt für $H = h = 0$. In diesem Falle geht der gemeinsame Tangentialspeer T der Kurven K, L von Π durch O, was zur Folge hat, daß die Kurven k, l von π eine gemeinsame durch o gehende Asymptote besitzen.

Jeder Aussage über die Tangentialentfernungen von Kurvenpaaren der Ebene Π entspricht vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ eine analoge Aussage über die Tangentialmomente der entsprechenden Kurvenpaare der Ebene π. Insbesondere kann auch der *Satz von Scheffers*[10] *über die Äquitangentialkurvenkongruenzen* der Ebene Π auf die entsprechenden

[10] *G. Scheffers*, Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen, Math. Ann. 60 (1905), p. 516.

Kongruenzen zu o symmetrischer Kurven der Ebene π übertragen werden.

Einer *Äquitangentialkurvenkongruenz* der Ebene Π entspricht in der Ebene π eine *Kongruenz von* ∞^2 *zu o symmetrischen Kurven*, die aus ∞^1 Scharen besteht, derart, daß jede Kurve einer Schar mit allen Kurven einer anderen Schar gleiche Tangentialmomente bestimmt. Greift man aus einer solchen Kurvenkongruenz jene Kurven heraus, die ein zu o symmetrisches Geradenpaar (in zu o symmetrischen Punkten) berühren und bestimmt man für diese Kurven die oskulierenden Kegelschnitte mit o als Mitte, dann bilden diese Kegelschnitte eine lineare Kegelschnittschar und besitzen demnach ein zweites zu o symmetrisches Tangentenpaar.

Den Speertransformationen der Ebene Π entsprechen vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ in der Ebene π die Transformationen der zu o symmetrischen Geradenpaare. *Insbesondere entspricht der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *der äquilongen Speertransformationen der Ebene* Π *in der Ebene* π *eine Gruppe* $\mathfrak{g}$ *von Transformationen der zu o symmetrischen Geradenpaare, die die Tangentialmomente entsprechender zu o symmetrischer Kurvenpaare von* π *invariant lassen.*

Bei Beachtung von (1) ergeben sich aus den bekannten[11] Transformationsgleichungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ die entsprechenden Gleichungen

$$\varphi_1 = \varphi_1(\varphi)$$
$$h_1^2 = h^2 \cdot \varphi'_1(\varphi) + f(\varphi)$$

für die Gruppe $\mathfrak{g}$.

Die *erweiterte Laguerre'sche Gruppe* $\mathfrak{G}_7$ der Ebene Π ist bekanntlich[12] holoedrisch isomorph zur *Jonquiere'schen Gruppe* $\mathfrak{G}_{n+5}$, für $n = 2$. Sie ist gekennzeichnet als die umfassendste Gruppe von Speertransformationen der Ebene Π, bei der die Mannigfaltigkeit der Zykel von Π invariant bleibt. In den pseudohomogenen Koordinaten $(\sigma_{00};\ \sigma_1,\ \sigma_2)$ wird $\mathfrak{G}_7$ dargestellt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma_{00}^* &= K \cdot \delta \cdot \sigma_{00} + b_{11}\sigma_1^2 + 2b_{12}\sigma_1\sigma_2 + b_{22}\sigma_2, \\ \sigma_1^* &= a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2, \\ \sigma_2^* &= a_{21}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2, \end{aligned} \tag{19}$$

worin $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bedeutet.

---

[11] *G. Scheffers*, a. a. O., p. 526.

[12] *H. Mohrmann*, Über die automorphe Kollineationsgruppe des rationalen Normalkegels n. Ordnung, Rend. d. Circ. Math. di Palermo, 31 (1. Sem.), (1911), p. 186 und *W. Blaschke*, a. a. O., p. 49.

Vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ entspricht nun der Gruppe $\mathfrak{G}_7$ in der Ebene π die Gruppe $\mathfrak{g}_7$, die gekennzeichnet ist als *die umfassendste Gruppe von Transformationen der zu o symmetrischen Geradenpaare, bei der die Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte mit o als Mitte in sich transformiert wird.*

Durch die Forderung $K^2 = 1$ ist die sogenannte *engere Laguerre'sche Gruppe* $\mathfrak{G}_6$ von Π bestimmt, als jene (gemischte) Untergruppe von $\mathfrak{G}_7$ gegenüber der die *Tangentialentfernung eines Zykelpaares eine absolute Invariante* darstellt. Ihr entspricht in der Ebene π die (gemischte) Untergruppe $\mathfrak{g}_6$ von $\mathfrak{g}_7$, bei der *die Tangentialmomente entsprechender Paare von Kegelschnitten mit o als Mitte ungeändert bleiben.*

Die Gruppe $\mathfrak{g}_7$ besitzt für $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ als Untergruppe die Gruppe $\mathfrak{g}_4$ der *Affinitäten von π mit* o *als Fixpunkt,* die durch die Invarianz des Systems der ∞^2, als zerfallende Kegelschnitte aufzufassenden, zu *o* symmetrischen Punktepaare von π gekennzeichnet ist. Der Durchschnitt der Gruppen $\mathfrak{g}_4$ und $\mathfrak{g}_6$ erweist sich sodann als die (gemischte) Untergruppe $\mathfrak{g}_3$ der *flächentreuen Affinitäten von π mit* o *als Fixpunkt.*

Beachtet man den zwischen der Laguerre'schen Geometrie in der Mannigfaltigkeit der konzentrischen Kegelschnitte der Ebene π und der pseudoeuklidischen Raumgeometrie des R_3, durch die Abbildung $\mathfrak{B}$ vermittelten Zusammenhang, dann entsprechen den Gruppen $\mathfrak{g}_7$, $\mathfrak{g}_6$, $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_3$ von π im R_3 die Gruppen Γ_7, Γ_6, Γ_4, Γ_3. Es bedeuten sodann bekanntlich Γ_7 die Gruppe der pseudoeuklidischen Ähnlichkeiten, Γ_6 die Gruppe der pseudoeuklidischen Bewegungen, während Γ_4 und Γ_3 die entsprechenden Transformationen mit einem gemeinsamen Fixpunkt umfassen. Neben diesen Gruppen sind noch von Interesse die Gruppe $\overline{\Gamma}_3$ der Schiebungen im R_3 und die daraus durch Zusammensetzung mit den zentrischen Ähnlichkeiten gewonnene Gruppe $\overline{\Gamma}_4$. Ihnen entsprechen zufolge der Abbildung $\mathfrak{B}$ in der Ebene π die Gruppen $\bar{\mathfrak{g}}_3$ und $\bar{\mathfrak{g}}_4$, wobei sich $\bar{\mathfrak{g}}_4$ aus der Gruppe $\mathfrak{g}_7$ (19) durch die Forderung $a_{11} = a_{22}, a_{12} = a_{21} = 0$ heraushebt und $\bar{\mathfrak{g}}_3$ als Durchschnitt von $\bar{\mathfrak{g}}_4$ und $\mathfrak{g}_6$ bestimmt ist. *Die Gruppen $\bar{\mathfrak{g}}_3$ bzw. $\bar{\mathfrak{g}}_4$ sind gekennzeichnet als jene Untergruppen von $\mathfrak{g}_6$ bzw. $\mathfrak{g}_7$, bei denen jedes zu o symmetrische Geradenpaar in ein dazu paralleles zu* o *symmetrisches Geradenpaar transformiert wird.*

Die Abbildung $\mathfrak{A}$ hat in der Ebene π ein Modell der Laguerre'schen Geometrie ergeben, bei dem die Kegelschnitte von π mit *o* als Mitte als Mannigfaltigkeiten zu *o* symmetrischer Geradenpaare aufzufassen sind. Durch die Polarität am Einheitskreis kann daraus ein dazu duales

Modell gewonnen werden. Dabei entsprechen den Gruppen $\mathfrak{g}_7$ und $\mathfrak{g}_6$ die dazu isomorphen Gruppen $\mathfrak{g}_7'$ und $\mathfrak{g}_6'$ von Transformationen zu o symmetrischer Punktepaare. *Die Gruppe* $\mathfrak{g}_7'$ *ist die umfassendste Gruppe aller Transformationen der zu* o *symmetrischen Punktepaare, bei der die Gesamtheit der als Punktmannigfaltigkeiten aufzufassenden Kegelschnitte mit* o *als Mitte invariant bleibt*, während $\mathfrak{g}_6'$ jene *Untergruppe von* $\mathfrak{g}_7'$ *darstellt, gegenüber der jedes Kegelschnittpaar mit* o *als gemeinsamer Mitte eine absolute Invariante besitzt*, die das duale Gegenstück zum Tangentialmoment eines Kegelschnittpaares ist.

Die Gruppe $\mathfrak{g}_4$ *der Affinitäten mit* o *als Fixpunkt bzw. die Untergruppe* $\mathfrak{g}_3$ *der flächentreuen Affinitäten erweisen sich dann als die Durchschnitte der Gruppen* $\mathfrak{g}_7$ *und* $\mathfrak{g}_7'$, *bzw.* $\mathfrak{g}_6$ *und* $\mathfrak{g}_6'$.

Die den Gruppen $\mathfrak{g}_4$ bzw. $\mathfrak{g}_3$ in der Polarität entsprechenden Untergruppen $\bar{\mathfrak{g}}_4'$ bzw. $\bar{\mathfrak{g}}_3'$ von $\mathfrak{g}_7'$ bzw. $\mathfrak{g}_6'$ sind dadurch gekennzeichnet, daß entsprechende, zu o symmetrische Punktepaare auf gemeinsamen Geraden durch o liegen.

Die Gruppen $\bar{\mathfrak{g}}_7$ und $\bar{\mathfrak{g}}_7'$ können aufgefaßt werden als Gruppen von Berührungstransformationen, der als Elementvereine zu betrachtenden konzentrischen Kegelschnitte, bei denen je ein ausgezeichnetes System von ∞^2 Kegelschnitten invariant bleibt. Bei den Transformationen aus $\mathfrak{g}_7$ ist das System der ∞^2 zu o symmetrischen Geradenpaare invariant, während bei den Transformationen aus $\mathfrak{g}_7'$ das System der ∞^2 zu o symmetrischen Punktepaare in sich transformiert wird.

Man kann nun nach der gemeinsamen Obergruppe der Gruppen $\mathfrak{g}_7$ und $\mathfrak{g}_7'$ fragen, als der *umfassendsten Gruppe von Berührungstransformationen der Kegelschnitte mit* o *als Mitte. Es ergibt sich hierfür eine zehngliedrige Gruppe* $\mathfrak{g}_{10}$, *die der Gruppe* $\mathfrak{G}_{10}$ *der Lie'schen Kreisgeometrie der Ebene* Π *vermöge der Abbildung* $\mathfrak{A}$ *entspricht.*

Zu den dreiparametrigen Kegelschnittmannigfaltigkeiten einer Ebene, die eine zehngliedrige Gruppe von Berührungstransformationen gestatten, gehört demnach neben der Mannigfaltigkeit aller Kreise und der Mannigfaltigkeit aller Parabeln mit gemeinsamen Fernpunkt, auch die Mannigfaltigkeit der konzentrischen Kegelschnitte. *Die mit den drei genannten Kegelschnittmannigfaltigkeiten verbundenen Modelle der Lie-schen Geometrie stellen drei projektiv verschiedene Typen dar.*

Zusammenfassend ergibt sich die folgende Übersicht über die Transformationsgruppen der Kegelschnitte von π mit o als Mitte.

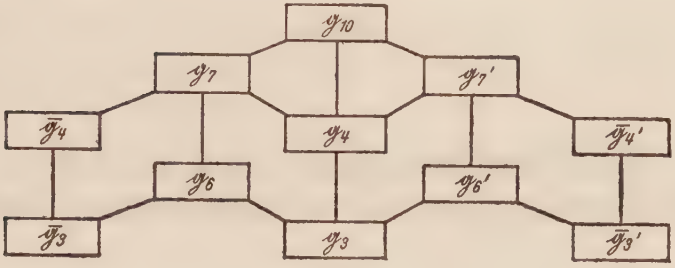

Abb. 1.

Die Gruppen $\mathfrak{g}_{10}$, $\mathfrak{g}_7$, $\mathfrak{g}_7'$, $\mathfrak{g}_4$ verdienen noch aus einem anderen Grunde ein besonderes Interesse. Die Ebene π im Verein mit dem Punkt o möge als ein Flächenelement (o, π) des Raumes aufgefaßt werden. Es können dann die nichtausgearteten Kegelschnitte mit o als Mitte, die zu o symmetrischen Geradenpaare und die zu o symmetrischen Punktepaare aufgefaßt werden, als die Indikatrizen von Flächen, Torsen und Kurven (als Vereine von ∞^2 Flächenelementen), die das Flächenelement (o, π) enthalten[13]. Betrachtet man nun die Gruppen der Berührungstransformationen, der Ebenentransformationen, der Punkttransformationen und der linearen Transformationen, die das Flächenelement (o, π) invariant lassen[14], dann bewirken diese in der Ebene π gewisse Gruppen von Transformationen der Indikatrizen, nämlich genau die Gruppen $\mathfrak{g}_{10}$, $\mathfrak{g}_7$, $\mathfrak{g}_7'$, $\mathfrak{g}_4$.

Die Abbildung $\mathfrak{A}$ hat in der Ebene π zwei zueiander duale Modelle der Laguerre'schen Geometrie ergeben, die insofern ein selbständiges Interesse beanspruchen dürfen, als die konstruktive Behandlung dieser Modelle auf neue Konstruktionen in der Mannigfaltigkeit der konzentrischen Kegelschnitte führt. Dies gilt in besonderem Maße für die involutorischen Transformationen der Gruppen $\mathfrak{g}_6$, $\mathfrak{g}_6'$, $\mathfrak{g}_3$, $\bar{\mathfrak{g}}_3$, $\bar{\mathfrak{g}}_3'$, sowie für die zu o symmetrischen Kurven dritter und vierter Klasse bzw. dritter und vierter Ordnung von π, sofern diese als Hyperzykel der Laguerre'schen Geometrie in der Mannigfaltigkeit der konzentrischen Kegelschnitte von π aufgefaßt werden.

Es muß einer späteren Note vorbehalten bleiben über diese und andere damit im Zusammenhang stehende Fragen ausführlicher zu berichten.

---

[13] *R. Inzinger*, Zur Differentialgeometrie Pfaff'scher Mannigfaltigkeiten, Monatsh. f. Math. u. Phys. 46 (1937), p. 225—228.

[14] *R. Inzinger*, Zur Infinitesimalgeometrie der Berührungstransformationen, Monatsh. f. Math. u. Phys. 46 (1937), p. 28—33.

Über Striktionslinien von Kurven- und Geradenscharen im elliptischen Raum.

Von
Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 8. Februar 1947.)

Die Sätze über Striktionslinien von Kurven- und Geradenscharen des Euklidischen Raumes[1] drücken meist Eigenschaften der „inneren oder absoluten Geometrie" einer Fläche unabhängig vom Einbettungsraum aus. Daher liegt die im folgenden vorgenommene Übertragung dieser Sätze in die elliptische Geometrie nahe. Da der hier benützte Formel- und Rechenapparat, der von alternierenden Differentialprodukten und äußeren Ableitungen Gebrauch macht, in völliger Analogie auch in der Euklidischen Geometrie aufgebaut werden kann[2], ist somit auch der Weg gezeigt, auf dem man mit geringem Rechenaufwand die Ergebnisse dort begründen kann.

1. Bezeichnungen und Hilfsmittel der elliptischen Differentialgeometrie.[3]

Einer genormten Quaternion

$$\mathfrak{Q} = q_0 + e_1 q_1 + e_2 q_2 + e_3 q_3$$

mit

$$\overline{\mathfrak{Q}} = q_0 - e_1 q_1 - e_2 q_2 - e_3 q_3$$

als zu $\mathfrak{Q}$ konjugierter Quaternion und

$$(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}) = \mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{Q}} = \overline{\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

ordnen wir in einem projektiven 3-dimensionalen Raum P_3 den Punkt zu, der in einem in P_3 fest gewählten System die homogenen Koordinaten q_0, q_1, q_2, q_3 besitzt. Wegen der Normierung ist die Zuordnung

---

[1] Vgl. *H. R. Müller*, Über Striktionslinien von Kurvenscharen. Monatsh. f. Math. u. Phys., Bd. 50 (1941), S. 101—110.

[2] Vgl. *W. Blaschke*, Über die Differentialgeometrie von Gauß. Jahresber. d. D. Math.-Vereinig., Bd. 52 (1942), S. 61—71.

[3] Vgl. *W. Blaschke*, Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik I, II, III. Hamburger Math. Einzelschr., 34. Heft (1942).

Mit wenigen Ausnahmen werden die dort gewählten Bezeichnungen übernommen und die im folgenden benötigten Ergebnisse zitiert.

zwischen Quaternion und Punkt bis auf den Faktor ± 1 eindeutig; es stellen also die Quaternionen $\mathfrak{Q}$ und $-\mathfrak{Q}$ denselben, etwa gleichfalls mit $\mathfrak{Q}$ bezeichneten Punkt des P_3 dar.

Dem projektiven Raum P_3 wird eine „elliptische Maßbestimmung" oder „Metrik" durch folgende Erklärung des Abstandes oder der Entfernung ϑ zweier Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ aufgedrückt:

$$\cos \vartheta = (\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}) = p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \tag{1}$$

Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zwei benachbarte Punkte, also $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} + d\mathfrak{Q}$, so erhält man für das „Bogenelement des elliptischen Raumes" mit der Krümmung $+1$

$$d\vartheta^2 = (d\mathfrak{Q}\,d\mathfrak{Q}) = \sum_{i=0}^{3} dq_i^2 \tag{2}$$

Zwei Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ heißen zu einander „(absolut) polar", wenn sie zu einander orthogonal sind, also $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ gilt oder $\cos \vartheta = (\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}) = 0$. Alle zu einem festen Punkt $\mathfrak{P}$ orthogonalen Punkte $\mathfrak{Q}$ des P_3 erfüllen die „(absolute) Polarebene" von $\mathfrak{P}$; $\mathfrak{P}$ ist dann ihr „(absoluter) Pol". *A. Cayleys* projektiver Auffassung der elliptischen Geometrie liegt somit das absolute Gebilde

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 0,$$

die „nullteilige oder absolute Quadrik" zugrunde.

Ein Punkt

$$\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P} \cos \vartheta - \mathfrak{Q} \sin \vartheta \tag{3}$$

durchläuft für $0 \leqq \vartheta < \pi$ genau einmal die gerichtete Gerade $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}\}$ durch zwei zu einander orthogonale Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Der Einheitsvektor

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{Q}\,\overline{\mathfrak{P}} \tag{4}$$

heißt der „linke" und entsprechend

$$\mathfrak{r}' = \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{Q} \tag{5}$$

der „rechte Richtungsvektor" der Geraden $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}\} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$. Zwei gerichtete Gerade heißen bei Übereinstimmung ihrer linken Richtungsvektoren „linksparallel", bei Übereinstimmung ihrer rechten Richtungsvektoren „rechtsparallel". Die Umkehrung der Richtung einer Geraden wirkt sich in der Richtungsänderung beider Richtungsvektoren aus.

$$\mathfrak{r}\,\mathfrak{P} - \mathfrak{P}\,\mathfrak{r}' = 0 \tag{6}$$

ist die Inzidenzbedingung des Punktes $\mathfrak{P}$ und der Geraden $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$ mit den Richtungsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$.

Zwei gerichtete Gerade $[\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_1']$ und $[\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_2']$ sind zu einander (absolut) polar, wenn

$$\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 = 0 \quad \mathfrak{r}_1' + \mathfrak{r}_2' = 0 \tag{7}$$

gilt. Hiermit ergibt sich aus (6)

$$\mathfrak{r}\,\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\,\mathfrak{r}' = 0 \tag{8}$$

als Bedingung dafür, daß die Gerade $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$ in der Polarebene des Punktes $\mathfrak{P}$ liegt.

Den Winkel zweier sich schneidender Geraden $R_1 = \{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1\} = [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_1']$ und $R_2 = \{\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_2\} = [\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_2']$ erklären wir durch

$$\cos \mathfrak{Z} = (\mathfrak{Q}_1\, \mathfrak{Q}_2) \tag{9}$$

Sind σ und σ' die Winkel ihrer entsprechenden Richtungsvektoren, ist also

$$\cos \sigma = (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2),\ \cos \sigma' = (\mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2') \quad 0 < \sigma, \sigma' < \pi,$$

so gilt $\sigma = \sigma' = \mathfrak{Z}$.[4]

Vier genormte, paarweise orthogonale Punkte $\mathfrak{P}_i$ mit der Determinante $+1$ bilden einen „Polarvierling" oder „Polartetraeder":

$$(\mathfrak{P}_i\, \mathfrak{P}_k) = \varepsilon_{ik} \quad (\mathfrak{P}_0\, \mathfrak{P}_1\, \mathfrak{P}_2\, \mathfrak{P}_3) = +\mathbf{1} \tag{10}$$

Für die sechs Kanten des Vierlings führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{array}{lll} G_1 = (\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1) & G_2 = (\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_2) & G_3 = (\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_3) \\ G_1^* = (\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3) & G_2^* = (\mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_1) & G_3^* = (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) \end{array} \tag{11}$$

G_j und G_j^* sind also absolute Polaren zu einander. Für ihre Richtungen gilt:

$$\left.\begin{array}{l} G_j = [\mathfrak{r}_j, \mathfrak{r}_j'] \quad G_j^* = [\mathfrak{r}_j^*, \mathfrak{r}_j^{*\prime}] = [\mathfrak{r}_j, -\mathfrak{r}_j'] \quad (j = 1, 2, 3) \\ (\mathfrak{r}_j\, \mathfrak{r}_k) = (\mathfrak{r}_j'\, \mathfrak{r}_k') = \varepsilon_{jk} \\ (\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2\, \mathfrak{r}_3) = (\mathfrak{r}_1'\, \mathfrak{r}_2'\, \mathfrak{r}_3') = +1 \end{array}\right\} \tag{12}$$

Die Abhängigkeit des Polarvierlings von den unabhängigen Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_f$ führt zum folgenden System von Ableitungsgleichungen:

---

[4] Verschwindet der „Skalarteil" q_0 einer Quaternion $\mathfrak{Q}$, so besteht die Quaternion nur aus ihrem „Vektorteil", ist also ein Vektor. $(\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2)$ ist also das gewöhnliche Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$.

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{P}_0 &= \quad + \alpha_1\,\mathfrak{P}_1 + \alpha_2\,\mathfrak{P}_2 + \alpha_3\,\mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_1 &= -\alpha_1\,\mathfrak{P}_0 \quad + \beta_3\,\mathfrak{P}_2 - \beta_2\,\mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_2 &= -\alpha_2\,\mathfrak{P}_0 - \beta_3\,\mathfrak{P}_1 \quad + \beta_1\,\mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_3 &= -\alpha_3\,\mathfrak{P}_0 + \beta_2\,\mathfrak{P}_1 - \beta_1\,\mathfrak{P}_2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

sowie

$$\left.\begin{aligned} d\mathfrak{r}_1 &= \quad + \omega_3\mathfrak{r}_2 - \omega_2\mathfrak{r}_3 & d\mathfrak{r}_1' &= \quad + \omega_3'\mathfrak{r}_2' - \omega_2'\mathfrak{r}_3' \\ d\mathfrak{r}_2 &= -\omega_3\mathfrak{r}_1 \quad + \omega_1\mathfrak{r}_3 & d\mathfrak{r}_2' &= -\omega_3'\mathfrak{r}_1' \quad + \omega_1'\mathfrak{r}_3' \\ d\mathfrak{r}_3 &= +\omega_2\mathfrak{r}_1 - \omega_1\mathfrak{r}_2 & d\mathfrak{r}_3' &= +\omega_2'\mathfrak{r}_1' - \omega_1'\mathfrak{r}_2' \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

wobei zwischen den „linearen Differentialformen (*Pfaff*schen Formen)" in den du, also zwischen den α, β, ω und ω' folgende Beziehungen bestehen:

$$\omega_j = \beta_j + \alpha_j \qquad \omega'_j = \beta_j - \alpha_j$$

Unter Verwendung „alternierender Produkte von Differentialen"[5]

$$[d\,u\;d\,v] + [d\,v\;d\,u] = 0 \qquad [du\;du] = 0$$

sowie der „äußeren Ableitung"[6]

$$d\omega = \Sigma\,[da_k\,du_k] = \Sigma\,\frac{\partial\,a_k}{\partial\,u_j}\,[du_j\,du_k] = \sum_{j>k}\left(\frac{\partial\,a_k}{\partial\,u_j} - \frac{\partial\,a_j}{\partial\,u_k}\right)[du_j\;du_k]$$

einer *Pfaff*schen Differentialform $\omega = \Sigma\,a_k\,du_k$ ergeben sich folgende Integrierbarkeitsbedingungen der Systeme (13) und (14)

$$d\beta_j = [\beta_l\,\beta_k] + [\alpha_l\,\alpha_k] \qquad d\alpha_j = [\beta_l\,\alpha_k] + [\alpha_l\,\beta_k] \tag{15}$$

beziehungsweise

$$d\omega_j = [\omega_l\,\omega_k] \qquad d\omega'_j = [d\omega_j'\;\omega_k'] \tag{16}$$

für zyklische Vertauschungen j, k, l von 1, 2, 3.

Beschreibt der Eckpunkt $\mathfrak{P}_0$ eine (zweidimensionale) Fläche $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0\,(u_1, u_2)$ im elliptischen Raum P_3 und wird das Polartetraeder so gewählt, daß der zugehörige Eckpunkt $\mathfrak{P}_3\,(u_1, u_2)$ den Pol der jeweiligen Tangentialebene in $\mathfrak{P}_0$ bildet, gilt also

---

[5] Vgl. *H. Graßmann*, Ausdehnungslehre, Berlin 1862, Werke 1, 2 (1896), Nr. 63, S. 43, Anmerkung dazu von *F. Engel*, S. 400.

[6] *E. Cartan*, Ann. Ec. Norm. 16 (1899) oder etwa *E. Kähler*, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Hamburger Math. Einzelschr., 16. Heft (1934).

Im übrigen setzen wir hierbei natürlich, wie bei differentialgeometrischen Betrachtungen im allg. üblich, geometrische Gebilde, Flächen, Kurven usf. und deren Darstellungen „im Sinne der Differentialgeometrie" voraus, d. h. postulieren Existenz und Stetigkeit der benötigten Ableitungen, Regularität der Parameterdarstellungen an den betrachteten Stellen usf.

$$(d\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_3) = -(\mathfrak{P}_0\,d\mathfrak{P}_3) = \alpha_3 = 0,\ \omega_3 = \omega_3' = \beta_3 \tag{17}$$

so vereinfachen sich die Systeme (13) und (14) in folgender Weise:

$$\left.\begin{aligned} d\mathfrak{P}_0 &= \quad . \quad + \alpha_1\mathfrak{P}_1 + \alpha_2\mathfrak{P}_2 \quad . \\ d\mathfrak{P}_1 &= -\alpha_1\mathfrak{P}_0 \quad . \quad + \beta_3\mathfrak{P}_2 - \beta_2\mathfrak{P}_3 \\ d\mathfrak{P}_2 &= -\alpha_2\mathfrak{P}_0 - \beta_3\mathfrak{P}_1 \quad . \quad + \beta_1\mathfrak{P}_3 \\ d\mathfrak{P}_3 &= \quad . \quad \beta_2\mathfrak{P}_1 - \beta_1\mathfrak{P}_2 \quad . \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} d\mathfrak{r}_1 &= \quad . \quad + \omega_3\mathfrak{r}_2 - \omega_2\mathfrak{r}_3 & d\mathfrak{r}_1' &= \quad . \quad + \omega_3\mathfrak{r}_2' - \omega_2'\mathfrak{r}_3' \\ d\mathfrak{r}_2 &= -\omega_3\mathfrak{r}_1 \quad . \quad + \omega_1\mathfrak{r}_3 & d\mathfrak{r}_2' &= -\omega_3\mathfrak{r}_1' \quad . \quad + \omega_1'\mathfrak{r}_3' \\ d\mathfrak{r}_3 &= +\omega_2\mathfrak{r}_1 - \omega_1\mathfrak{r}_2 \quad . & d\mathfrak{r}_3' &= +\omega_2'\mathfrak{r}_1' - \omega_1'\mathfrak{r}_2' \quad . \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen (15) und (16) vereinfachen sich auf

$$\left.\begin{aligned} d\beta_1 &= [\beta_3\beta_2] & d\beta_2 &= [\beta_1\beta_3] & d\beta_3 &= [\beta_2\beta_1] + [\alpha_2\alpha_1] \\ d\alpha_1 &= [\beta_3\alpha_2] & d\alpha_2 &= [\alpha_1\beta_3] & 0 &= [\beta_2\alpha_1] + [\alpha_2\beta_1] \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind in der Tangentialebene nur bis auf Drehungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_0^* &= \mathfrak{P}_0 \quad , \quad \mathfrak{P}_3^* = \mathfrak{P}_3 \\ \mathfrak{P}_1^* &= \mathfrak{P}_1\cos\psi - \mathfrak{P}_2\sin\psi \\ \mathfrak{P}_2^* &= \mathfrak{P}_1\sin\psi + \mathfrak{P}_2\cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Fur die Richtungsvektoren gilt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}_1^* &= \mathfrak{r}_1\cos\psi - \mathfrak{r}_2\sin\psi & \mathfrak{r}_1^{*\prime} &= \mathfrak{r}_1'\cos\psi - \mathfrak{r}_2'\sin\psi \\ \mathfrak{r}_2^* &= \mathfrak{r}_1\sin\psi + \mathfrak{r}_2\cos\psi & \mathfrak{r}_2^{*\prime} &= \mathfrak{r}_1'\sin\psi + \mathfrak{r}_2'\cos\psi \\ \mathfrak{r}_3^* &= \mathfrak{r}_3 & \mathfrak{r}_3^{*\prime} &= \mathfrak{r}_3' \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Der Drehung (21) entsprechen die folgenden Transformationen der *Pfaff*schen Formen:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^* &= \omega_1\cos\psi - \omega_2\sin\psi & \omega_1^{*\prime} &= \omega_1'\cos\psi - \omega_2'\sin\psi \\ \omega_2^* &= \omega_1\sin\psi + \omega_2\cos\psi & \omega_2^{*\prime} &= \omega_1'\sin\psi + \omega_2'\cos\psi \\ & \omega_3^* = \omega_3 - d\psi & & \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^* &= \alpha_1\cos\psi - \alpha_2\sin\psi & \beta_1^* &= \beta_1\cos\psi - \beta_2\sin\psi \\ \alpha_2^* &= \alpha_1\sin\psi + \alpha_2\cos\psi & \beta_2^* &= \beta_1\sin\psi + \beta_2\cos\psi \\ & \beta_3^* = \beta_3 - d\psi & & \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Aus (18) ergibt sich für das Bogenelement der Fläche:

$$d\sigma_0^2 = (d\mathfrak{P}_0\,d\mathfrak{P}_0) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = E\,du_1^2 + 2F\,du_1du_2 + G\,du_2^2 \tag{25}$$

wenn hierbei gesetzt wird:

$$\alpha_i = A_{i1}\,du_1 + A_{i2}\,du_2 \quad , \quad \beta_i = B_{i1}\,du_1 + B_{i2}\,du_2 \tag{26}$$

$$E = A_{11}^2 + A_{21}^2,\ F = A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22},\ G = A_{12}^2 + A_{22}^2 \tag{27}$$

Der Winkel $\mathfrak{S}$ zweier im Punkte $\mathfrak{P}_0$ durch $d\mathfrak{P}_0$ und $\delta\mathfrak{P}_0$ bestimmten Richtungen wird durch die Polarform von (25) festgelegt:

$$\cos\mathfrak{S} = \frac{(d\mathfrak{P}_0\,\delta\mathfrak{P}_0)}{d\sigma_0\,\delta\sigma_0} =$$

$$= \frac{E\,du_1\,\delta u_1 + F\,(du_1\,\delta u_2 + du_2\,\delta u_1) + G du_2\,\delta u_2}{\sqrt{E du_1^2 + 2F\,du_1 du_2 + G\,du_2^2}\ .\ \sqrt{E\,\delta u_1^2 + 2F\,\delta u_1\delta u_2 + G\,\delta u_2^2}} \tag{28}$$

Die Flächenelemente der Flächen $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_3$ sind:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0 &= [\alpha_1\alpha_2] = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})\,[du_1 du_2] = \sqrt{EG - F^2}\,[du_1 du_2] \\ \Phi_3 &= [\beta_1\beta_2] = (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}))\,[du_1 du_2] \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

während

$$\Omega = [\omega_1\,\omega_2] = \Omega' = [\omega_1'\,\omega_2'] = -\,d\omega_3 = -\,d\beta_3 \tag{30}$$

die Flächenelemente der beiden somit flächentreu auf einander bezogenen „sphärischen Bilder" sind, die von den Richtungsvektoren $\mathfrak{r}_3(u_1, u_2)$ und $\mathfrak{r}_3'(u_1, u_2)$ der Flächennormalen $\{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_3\} = [\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$ auf der Einheitskugel beschrieben werden. Zwischen diesen drei Flächenelementen besteht folgende Beziehung (vgl. (20), (29) und (30)!):

$$\Omega = \Phi_0 + \Phi_3$$

$\Phi_0 \neq 0$ drückt die lineare Unabhängigkeit von α_1 und α_2 aus; es läßt sich somit jede *Pfaff*sche Form aus α_1 und α_2 durch Linearkombination aufbauen: So finden wir wegen (20)

$$\beta_3 = B_1\,\alpha_1 + B_2\,\alpha_2 \text{ mit } B_j = \frac{d\,\alpha_j}{\Phi_0} \tag{31}$$

Für das Krümmungsmaß K_0 der Fläche $\mathfrak{P}_0$ ergibt sich:

$$K_0 = \frac{\Omega}{\Phi_0} = \frac{\Phi_0 + \Phi_3}{\Phi_0} = \frac{[\omega_1\omega_2]}{[\alpha_1\alpha_2]} = -\frac{1}{\Phi_0}\,d\left\{\frac{d\,\alpha_1}{\Phi_0}\,\alpha_1 + \frac{d\,\alpha_2}{\Phi_0}\,\alpha_2\right\} \tag{32}$$

Die geodätische Krümmung c einer Flächenkurve ist:

$$c = \frac{\chi}{d\sigma_0} = \frac{\beta_3 + d\tau}{d\,\sigma_0} \tag{33}$$

wobei in $\chi = \beta_3 + d\tau$ der Winkel τ von der gerichteten Geraden $\{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1\} = [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_1']$ und der gerichteten Tangente an die Kurve im Punkte $\mathfrak{P}_0$ eingeschlossen wird. Aus

$$\cos\tau = \frac{(d\,\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_1)}{d\,\sigma_0} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}\ ,\ \sin\tau = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \tag{34}$$

folgt

$$d\tau = \frac{\alpha_1 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \tag{35}$$

Nun suchen wir die Differentialgleichungen der *Parallelverschiebung im Sinne von Levi-Civita* auf der Fläche $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$.

Einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit V_n mit den unabhängigen Veränderlichen x_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ wird durch die positiv definite, quadratische Differentialform

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta$$

eine Metrik aufgeprägt; das System der Koeffizienten $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ bildet den kovarianten Maßtensor der V_n.

Die Änderungen der kontravarianten Komponenten ξ^λ eines Vektors auf der V_n bei Parallelverschiebung längs des durch die dx_α gegebenen Bogenelementes werden durch die folgenden Differentialgleichungen in absoluter Form bestimmt:[7]

$$d\xi^\lambda + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha\, dx_\beta = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

Hierbei bedeuten die $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \left\{ {\alpha\beta \atop \lambda} \right\}$ die *Christoffelschen Dreiindizessymbole zweiter Art.*

Sind die ξ^λ die kontravarianten Komponenten eines Einheitsvektors, also Richtungsparameter auf der V_n, so ist

$$g_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha\, \xi^\beta = 1 \tag{37}$$

erfüllt.

Nun sei eine zweidimensionale metrische Mannigfaltigkeit V_2 mit orthogonalem Parameterliniennetz $x_1 =$ konst. und $x_2 =$ konst. gegeben. Wir berechnen für sie das System (36) der Differentialgleichungen des Parallelismus. Es gilt also

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + g_{22}\, dx_2^2,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{11} = m_1^2,\ g_{22} = m_2^2. \tag{38}$$

Die Richtungen der Parameterlinien $dx_\lambda = 0$ können wir durch kontravariante Komponenten ${}_\lambda\xi^\alpha$ festlegen; hierbei ist

$${}_1\xi^1 = 0,\ {}_1\xi^2 = \frac{1}{m_2} \quad \text{und} \quad {}_2\xi^1 = \frac{1}{m_1},\ {}_2\xi^2 = 0$$

Schließt nun der durch ξ^α bestimmte Flächeneinheitsvektor, der parallel verschoben werden soll, mit der Richtung ${}_2\zeta^\alpha$ den Winkel ψ bzw. mit

---

[7] Vgl. etwa *T. Levi-Civita*, Der absolute Differentialkalkül und seine Anwendungen in Geometrie und Physik. Deutsch von *A. Duschek*, Berlin (1928), S. 64.

der Richtung ${}_1\xi^\alpha$ den Winkel $\frac{\pi}{2} - \psi$ ein, so ist

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= {}_1\xi^1 \sin\psi + {}_2\xi^1 \cos\psi = \frac{\cos\psi}{m_1} \\ \xi^2 &= {}_1\xi^2 \sin\psi + {}_2\xi^2 \cos\psi = \frac{\sin\psi}{m_2} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Aus dem System (36) ergibt sich nun wegen (38) und (39) die einzige Differentialgleichung der Parallelverschiebung im Sinne von *Levi-Civita*

$$d\psi + \frac{1}{2\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\,dx_2 - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\,dx_1\right) = 0 \tag{40}$$

oder

$$d\psi + \frac{1}{m_1\,m_1}\left(m_2\,\frac{\partial m_2}{\partial x_1}\,dx_2 - m_1\,\frac{\partial m_1}{\partial x_2}\,dx_1\right) = 0 \tag{41}$$

Die Transformation des Bogenelementes (38) in das Bogenelement (25) der Fläche $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$ kann nun durch die Differentialgleichungen

$$m_i\,dx_i = a_i = A_{i1}\,du_1 + A_{i2}\,du_2 \qquad (i = 1, 2) \tag{42}$$

erfolgen, für welche die Größen $m_i = \sqrt{g_{ii}}$ als Multiplikatoren fungieren. — Es ergibt sich dann

$$da_i = d(m_i\,dx_i) = [dm_i\,dx_i] = \left[\left(\frac{\partial m_i}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial m_i}{\partial x_2}\,dx_2\right)\,dx_i\right],$$

somit also

$$da_1 = -\frac{\partial m_1}{\partial x_1}\,[dx_1\,dx_2],\; da_2 = \frac{\partial m_2}{\partial x_1}\,[dx_1\,dx_2].$$

Wegen (29) finden wir

$$\Phi_0 = [a_1\,a_2] = m_1 m_2\,[dx_1\,dx_2] = \sqrt{g_{11}\,g_{22}}\;[dx_1\,dx_2]$$

und schließlich zufolge (31) und (41) die einfache Differentialgleichung

$$d\psi + \beta_3 = d\psi + \omega_3 = 0 \tag{43}$$

die für den Parallelismus von *Levi-Civita* auf der Fläche $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0(u_1, u_2)$ charakteristisch ist.

Erfolgt die Parallelverschiebung längs einer Flächenkurve, gegen deren gerichtete Tangente im Punkte $\mathfrak{P}_0$ die Tetraederkante $\{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_1\}$, so wie früher, unter dem Winkel τ geneigt ist, die jedoch mit der parallel verschobenen Richtung den Winkel φ einschließt, so können wir wegen $\psi = \varphi + \tau$ die Bedingung (43) auch in der Form schreiben:

$$d\varphi + d\tau + \beta_3 = d\varphi + \chi = 0$$

Der Autoparallelismus der geodätischen Linien (vgl. (33) für $c = 0$) liegt nun auf der Hand.

Diese Zusammenfassung der im folgenden benötigten Formeln der elliptischen Differentialgeometrie wollen wir mit einem Hinweis beschließen, der sich auf das Operieren mit *Pfaff*schen Formen bezieht.

Liegen drei *Pfaff*sche Formen $\alpha_i = A_{i1}du_1 + A_{i2}du_2$ $(i = 1, 2, 3)$ vor und bringt eine Variablensubstitution $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ eine der drei Formen, etwa α_1 zum Verschwinden, ist sie also eine Lösung der Differentialgleichung $\alpha_1 = 0$, so läßt sich für diese Substitution der Quotient $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ der beiden anderen Formen in der folgenden Gestalt schreiben, falls nur lineare Unabhängigkeit von α_1 und α_3 vorausgesetzt wird:

$$\left.\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right|_{\alpha_1=0} = \frac{[\alpha_1\alpha_2]}{[\alpha_1\alpha_3]} \tag{44}$$

Es ist ja

$$\left.\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right|_{\alpha_1=0} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31}}$$

und

$$[\alpha_1\alpha_2] = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})[du_1du_2], [\alpha_1\alpha_3] = (A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31})[du_1du_2].$$

Deuten wir den skalaren Bestandteil (Faktor) eines Monoms k-ten-Grades

$$\omega = A(u_1, u_2, \ldots, u_k) \cdot [du_1, du_2, \ldots, du_k]$$

durch Überstreichen an, setzen wir also

$$\overline{\omega} = A(u_1, u_2, \ldots, u_k),$$

so können wir etwa schreiben:

$$\overline{[\alpha_i\alpha_j]} = A_{i1}A_{j2} - A_{i2}A_{j1} \text{ oder } \overline{da_i} = \frac{\partial A_{i2}}{\partial u_1} - \frac{\partial A_{i1}}{\partial u_2}$$

Für (44) erhalten wir auch

$$\left.\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right|_{\alpha_1=0} = \frac{\overline{[\alpha_1\alpha_2]}}{\overline{[\alpha_1\alpha_3]}} \tag{45}$$

Aus dem Verschwinden (jedoch Nicht-identisch-Verschwinden) von α_1 und α_2, also aus $\alpha_i = A_{i1}du_1 + A_{i2}du_2 = 0$ $(A_{ij} \not\equiv 0)$ $(i = 1, 2)$

können wir auf $\overline{[\alpha_1\, \alpha_2]} = 0$ schließen. Desgleichen folgt aus $\alpha_1 = 0$ ($\alpha_1 \not\equiv 0$ und $\overline{[\alpha_1\, \alpha_2]} = 0$ umgekehrt $\alpha_2 = 0$ ($\alpha_2 \not\equiv 0$).

2. Über Striktionslinien von Kurvenscharen.

Wie in der Euklidischen Geometrie erklären wir die *Striktionslinie* S einer einparametrigen Schar von Kurven einer Fläche als den Ort der Punkte, in denen jede einzelne Kurve von ihrer Benachbarten eine extreme Entfernung besitzt. Die Striktionslinie wird im besonderen als *Stauungslinie* oder als *Einschnürungslinie* angesprochen, je nachdem ob diese Entfernung einem maximalen oder einem minimalen Wert entspricht; eine Einschnürungslinie kann auch in eine Berührende (Einhüllende) der Kurvenschar ausarten[8].

In einem orthogonal vorausgesetzten Parameterliniennetz ($F = 0$) betrachten wir die Bogenlänge der Kurven $u_1 = \text{konst.}$ zwischen zwei benachbarten Einzelkurven der Schar $u_2 = \text{konst.}$ Auf jeder Kurve dieser Schar suchen wir nun jenen Punkt, in dem dieser Abstand von der Nachbarkurve einen extremen Wert besitzt und finden durch gleiche Überlegungen, wie in der Euklidischen Geometrie, $\dfrac{\partial}{\partial u_1}\sqrt{G(u_1, u_2)} = 0$ oder, falls $G(u_1, u_2) \neq 0$

$$\frac{\partial G(u_1, u_2)}{\partial u_1} = 0$$

als Bestimmungsgleichung der Striktionslinie S der Kurvenschar $u_2 = \text{konst.}$, und zwar ist die hierdurch bestimmte Kurve S eine Stauungslinie oder Einschnürungslinie, jenachdem ob längs ihr die erste nicht verschwindende partielle Ableitung von $\sqrt{G(u_1, u_2)}$ nach u_1 von gerader Ordnung und negativ oder von gerader Ordnung und positiv ist[8]. *R. v. Lilienthal* zeigte auch, wie sich die Bestimmungsgleichung der Striktionslinie umrechnet, wenn die betrachtete Kurvenschar durch eine lineare, homogene Differentialgleichung

$$\alpha = A_1\, du_1 + A_2\, du_2 = 0 \tag{46}$$

gegeben ist. Die Punkte der Striktionslinie S erfüllen dann die Bedingungsgleichung

---

[8] Vgl. etwa Enz. Math. Wiss., III D 3 *(R. v. Lilienthal)*, S. 138 oder *R. v. Lilienthal*, Vorl. ü. Differentialgeometrie, II/1, Leipzig u. Berlin (1913), S. 75ff. Hierbei kommen wir überein $\sqrt{G} = +\sqrt{G}$ zu wählen.

$$\frac{\partial A_2 m}{\partial u_1} - \frac{\partial A_1 m}{\partial u_2} = 0 \tag{47}$$

wobei $m = \sqrt{\frac{EG-F^2}{n}}$ und $n = EA_2^2 - 2FA_1A_2 + GA_1^2$ ist[9].

Durch geeignete Drehung des Polarvierlings $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ um die Flächennormale $\{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_3\}$ können wir immer erreichen, daß eine beliebige, auf der Fläche vorgegebene Kurvenschar etwa der Differentialgleichung

$$\alpha_2 = A_{21}\, du_1 + A_{22}\, du_2 = 0$$

genügt. (Vgl. (13) und (26)!) Die *Pfaff*schen Formen α_i transformieren sich bei einer solchen Drehung durch den Winkel ψ nach (24). Durch geeignete Wahl des Winkels ψ läßt sich bewirken, daß

$$\alpha_2^* = \alpha_1 \sin\psi + \alpha_2 \cos\psi = k\alpha$$

mit $k = k(u_1, u_2)$ als skalarem Multiplikator ausfällt. Hieraus durch alternierende Produktbildung

$$\left.\begin{aligned} [\alpha_2^*\, \alpha_2] &= [\alpha_1\, \alpha_2] \sin\psi = k\,[\alpha\, \alpha_2] \\ [\alpha_1\, \alpha_2^*] &= [\alpha_1\, \alpha_2] \cos\psi = k\,[\alpha_1\, \alpha] \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

und somit, wenn wir die lineare Unabhängigkeit der *Pfaff*schen Formen voraussetzen und zu den skalaren Bestandteilen übergehen

$$tg\,\psi = -\frac{\overline{[\alpha\ \alpha_2]}}{\overline{[\alpha\ \alpha_1]}} = -\frac{A_1A_{22} - A_2A_{21}}{A_1A_{12} - A_2A_{11}}$$

Aus (48) ergibt sich dann $k^2(\overline{[\alpha\,\alpha_1]}^2 + \overline{[\alpha\,\alpha_2]}^2) = \overline{[\alpha_1\,\alpha_2]}^2$ oder

$$k = \frac{\overline{[\alpha_1\,\alpha_2]}}{\sqrt{\overline{[\alpha\alpha_1]}^2 + \overline{[\alpha\alpha_2]}^2}} = \sqrt{\frac{EG-F^2}{EA_2^2 - 2\,EA_1A_2 + GA_1^2}} = m \tag{49}$$

Somit bedeutet es also keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir eine der beiden Scharen $\alpha_i = 0$, etwa $\alpha_2 = 0$ als betrachtete Kurvenschar auf der Fläche wählen.

Für die Gleichung der Striktionslinie S der Schar $\alpha = \alpha_2 = 0$ finden wir nach (47) und (49) $m = 1$, $n = EG - F^2$ und daher

$$\frac{\partial A_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial A_{21}}{\partial u_2} = 0$$

Wegen (20), (26) und (45) können wir hierfür auch schreiben

$$\overline{d\,\alpha_2} = \overline{[\alpha_1\, \beta_3]} = A_{11}\, B_{32} - A_{12}\, B_{31} = 0 \tag{50}$$

[9] Vgl. die näheren Bedingungen, unter denen (47) tatsächlich die Striktionslinie der Schar (46) darstellt in *R. v. Lilienthal*, Vorl. ü. Diff.-Geom., II/1, S. 78ff.

Die Tangenten an die Kurven der Schar $\alpha_2 = 0$, also die Geraden $\{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1\}$ sind in den Punkten einer Kurve C nun dann und nur dann längs C parallel im Sinne von *Levi-Civita*, wenn in der Bedingungsgleichung (43) berücksichtigt wird, daß $\psi = \varphi + \tau = 0$ ausfällt. Daraus folgt die für den Parallelismus notwendige und hinreichende Bedingung

$$\omega_3 = \beta_3 = B_{31}\, du_1 + B_{32}\, du_2 = 0 \tag{51}$$

Es gibt somit zur Ausgangsschar $\alpha_2 = 0$ im allgemeinen eine weitere Kurvenschar als Lösung dieser Differentialgleichung, längs deren einzelnen Integralkurven die Tangenten an die erste Schar parallel im Sinne von *Levi-Civita* sind. Ist längs einer solchen Kurve C auch noch (50) erfüllt, so ist C die Striktionslinie S der Schar $\alpha_2 = 0$.

Das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen (50) und (51) kann nun in verschiedener Weise erfolgen:

1. Verschwinden die Größen B_{31} und B_{32} längs S nicht gleichzeitig, so hat dies zur Folge, daß auch $\alpha_1 = A_{11}\, du_1 + A_{12}\, du_2 = 0$ längs S ausfällt. Somit gehört S der Orthogonalschar der Ausgangsschar $\alpha_2 = 0$ an. Die Darstellung (33) der geodätischen Krümmung c zeigt uns nun wegen $\tau = \frac{\pi}{2}$, daß in den Punkten von S die geodätische Krümmung $c = 0$ wird. Wir können somit sagen:

Sind die Tangenten an die Scharkurven einer Schar längs deren Striktionslinie S parallel im Sinne von Levi-Civita, so ist S eine geodätische Linie und orthogonale Trajektorie der Schar[10].

2. In den Punkten von S gilt $B_{31} = B_{32} = 0$.

Die geodätische Krümmung in einem beliebigen Punkte einer Kurve der Schar $\alpha_2 = 0$ berechnet sich nach (33) wegen $\tau = 0$ und $d\sigma_0 = \alpha_1$ als

$$c_0 = \left.\frac{\beta_3}{\alpha_1}\right|_{\alpha_2 = 0} = \frac{[\beta_3 \alpha_2]}{[\alpha_1 \alpha_2]} = \frac{\overline{[\beta_3 \alpha_2]}}{\overline{[\alpha_1 \alpha_2]}} = \frac{B_{31} A_{22} - B_{32} A_{21}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} \tag{52}$$

Daraus ergibt sich somit ganz allgemein für die Schnittpunkte mit der Striktionslinie S (vgl. (50) und berücksichtige $\Phi_0 = [\alpha_1 \alpha_2] \neq 0$)

$$c_{0,S} = \frac{B_{31}}{A_{11}} = \frac{B_{32}}{A_{12}} \tag{53}$$

Wir können daher den Satz aussprechen:

---

[10] Vgl. die im folgenden ausgesprochene Verallgemeinerung des Satzes von *Bonnet*.

Besitzt jede Kurve der Schar $a_2 = 0$ im Punkte ihrer Striktionslinie S die geodätische Krümmung $c_{0,\,S} = 0$, so ist die Bedingung für Parallelismus längs S erfüllt, d. h. die Tangenten an die Scharkurven in den Punkten ihrer Striktionslinie S sind längs S parallel im Sinne von Levi-Civita.

Dieser Satz ist die „elliptische" Verallgemeinerung des *Darboux*schen Satzes der Euklidischen Geometrie:

Die Striktionslinie einer Regelfläche ist dadurch charakterisiert, daß die Erzeugenden längs ihr parallel im Sinne von Levi-Civita sind[11].

3. Legt im besonderen $a_2 = 0$ eine Schar geodätischer Linien der Fläche fest, gilt also längs dieser Kurven $c_0 = 0$ (vgl. (52)!) oder, was dasselbe ist, $\beta_3 = 0$, so ist in den Punkten der Striktionslinie S wegen (50) $B_{31} = B_{32} = 0$ (vgl. (53)!) und daher die Bedingung (51) längs S erfüllt.

Längs der Striktionslinie einer geodätischen Kurvenschar sind daher die Tangenten an die Scharkurven parallel im Sinne von Levi-Civita.

Dies können wir dadurch realisieren, daß *wir längs einer beliebigen Kurve C auf einer Fläche des elliptischen Raumes eine beliebige gerichtete Gerade parallel im Sinne von Levi-Civita verschieben und jene geodätische Kurvenschar betrachten, deren Kurven in den Punkten von C diese parallel verschobenen Richtungen berühren. C ist dann Striktionslinie dieser Schar.*

Wir haben somit eine „elliptische" Erweiterung des folgenden „Euklidischen" Satzes von *Pirondini* gefunden:

Dreht man alle Erzeugenden einer Regelfläche in ihrer Zentralebene um den Zentralpunkt durch einen beliebigen, aber festen Winkel, so bilden die neuen Lagen die Erzeugenden einer Regelfläche, die die Ursprüngliche längs deren Striktionslinie berührt und diese Kurve gleichfalls zur Striktionslinie besitzt[12].

Die Erweiterung in der elliptischen Geometrie lautet:

Dreht man auf einer Fläche in den Punkten der Striktionslinie S einer Schar von geodätischen Linien die Tangenten an diese durch einen beliebigen, aber festen Winkel und sieht diese gedrehten Tangenten als Ausgangsrichtungen von geodätischen Kurven an, die auf einer längs S die ursprüngliche Fläche berührenden Fläche liegen, so ist S auch Striktionslinie dieser geodätischen Schar.

---

[11] *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces. IV. Paris (1894), S. 343—345.

[12] *G. Pirondini*, Giorn. di mat. 23 (1885), S. 296.

Wir zeichnen nun auf der Fläche isogonale Trajektorien der durch $\alpha_2 = 0$ festgelegten Kurvenschar und berechnen deren geodätische Krümmung. Vorerst wollen wir jedoch die geodätische Krümmung der Orthogonalschar $\alpha_1 = 0$ ermitteln. Aus (33) folgern wir:

$$c_{\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{\beta_3}{\alpha_2}\right|_{\alpha_1=0} = \frac{[\alpha_1\beta_3]}{[\alpha_1\alpha_2]} = \frac{\overline{[\alpha_1\beta_3]}}{\overline{[\alpha_1\alpha_2]}} = \frac{A_{11}B_{32} - A_{12}B_{31}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \tag{54}$$

Für eine Isogonalschar ist $\tau = \text{konst.}\ (\tau \neq \frac{k\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Wegen (35) genügt sie der Differentialgleichung

$$d\tau = \frac{\alpha_1 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = 0 \text{ oder } \gamma = \alpha_1 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_1 = 0 \tag{55}$$

Für die geodätische Krümmung einer Kurve der Isogonalschar ergibt sich aus (33) und (34):

$$c_\tau = \left.\frac{\beta_3}{d\sigma_0}\right|_{\gamma=0} = \left.\frac{\beta_3}{\alpha_1}\right|_{\gamma=0} \cos\tau = \frac{[\beta_3\gamma]}{[\alpha_1\gamma]}\cos\tau = \frac{[\beta_3\alpha_2]}{[\alpha_1\alpha_2]}\cos\tau + \frac{[\alpha_1\beta_3]^2}{[\alpha_1\alpha_2][\beta_3\alpha_2]}\cos\tau$$

oder aber auch

$$c_\tau = \left.\frac{\beta_3}{d\sigma_0}\right|_{\gamma=0} = \left.\frac{\beta_3}{\alpha_2}\right|_{\gamma=0} \sin\tau = \frac{[\beta_3\gamma]}{[\alpha_2\gamma]}\sin\tau = \frac{[\alpha_1\beta_3]}{[\alpha_1\alpha_2]}\sin\tau + \frac{[\beta_3\alpha_2]^2}{[\alpha_1\alpha_2][\alpha_1\beta_3]}\sin\tau$$

wegen $$tg\,\tau = \left.\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|_{\gamma=0} = \frac{[\alpha_2\gamma]}{[\alpha_1\gamma]} = \frac{[\alpha_1\beta_3]}{[\beta_3\alpha_2]}$$

und zufolge (52) und (54) können wir dafür auch schreiben

$$c_\tau = \frac{[\beta_3\alpha_2]}{[\alpha_1\alpha_2]}\cos\tau + \frac{[\alpha_1\beta_3]}{[\alpha_1\alpha_2]}\sin\tau = c_0\cos\tau + c_{\frac{\pi}{2}}\sin\tau \tag{56}$$

In den Punkten der Striktionslinie S der Schar $\alpha_2 = 0$ besitzen daher wegen (50) die isogonalen Trajektorien die geodätische Krümmung (vgl. (53)):

$$c_{\tau,\,S} = \frac{[\beta_3\alpha_2]}{[\alpha_1\alpha_2]}\cos\tau = \frac{B_{31}}{A_{11}}\cos\tau = \frac{B_{32}}{A_{12}}\cos\tau = c_{0,\,S}\cos\tau \tag{57}$$

Durch Vergleich von (50) und (54) ergibt sich sofort die Gültigkeit des Satzes von *Beltrami* in der elliptischen Geometrie:

Die Striktionslinie einer Kurvenschar ist der Ort der Punkte, in denen die geodätische Krümmung der Kurven der Orthogonalschar verschwindet[13].

[13] *E. Beltrami*, Giorn. di mat. 3 (1865), S. 231.

Betrachten wir nun noch die Orthogonalschar unserer Isogonalschar zum Winkel τ, also mit anderen Worten, die Isogonalschar zum Winkel $\tau + \frac{\pi}{2}$ und wenden wir darauf diesen Satz an, so gilt wegen (53) und (57).

Besitzt jede Kurve der Schar $a_2 = 0$ im Punkte ihrer Striktionslinie S die geodätische Krümmung $c_{0,\,S} = 0$, so ist S auch Striktionslinie jeder isogonalen Schar der Ausgangsschar und die Tangenten an die Kurven einer dieser Scharen längs der gemeinsamen Striktionslinie S gehen durch Parallelverschiebung im Sinne von Levi-Civita auseinander hervor.

Dies kann als eine weitere Verallgemeinerung des schon angeführten Satzes von *Darboux* angesprochen werden. Eine andere Formulierung dieses Satzes wäre:

Haben zwei isogonale Kurvenscharen einer Fläche die Eigenschaft, eine gemeinsame Striktionslinie S zu besitzen, so ist S auch Striktionslinie jeder weiteren isogonalen Kurvenschar und die Tangenten an die Kurven jeder Schar sind längs dieser gemeinsamen Striktionslinie S parallel im Sinne von Levi-Civita.

Ist im besonderen $a_2 = 0$ eine Schar von geodätischen Linien, gilt also $c_0 = 0$ oder

$$\overline{[\beta_3\, a_2]} = B_{31}\, A_{22} - B_{32}\, A_{21} = 0 \tag{58}$$

und daher $c_{\tau,\,S} = 0$ für jeden Winkel τ, *so ist die Striktionslinie S von $a_2 = 0$ auch Striktionslinie jeder isogonalen Schar und die Tangenten an die Kurven einer Schar sind längs S parallel im Sinne von Levi-Civita.*

Die Erweiterung des Satzes von *Beltrami* liegt nun auf der Hand:

Die Striktionslinie einer Schar von geodätischen Linien ist der Ort der Punkte, in denen die geodätische Krümmung der Kurven einer Isogonalschar (beliebiger konstanter Winkel $\tau \neq 0, \pi$) verschwindet.

Bonnet stellte in der Euklidischen Geometrie den Satz auf:

Besitzt eine Kurve auf einer Regelfläche zwei der folgenden drei Eigenschaften a) geodätische Linie, b) Isogonaltrajektorie der Erzeugenden, c) Striktionslinie zu sein, so besitzt sie auch die dritte Eigenschaft[14].

Von *Darboux* rührt die Verallgemeinerung auf eine Schar von geodätischen Linien und deren Striktionslinie her mit der Einschränkung, daß sich die Striktionslinie nicht auf eine Einhüllende der Kurvenschar reduziert[15].

---

[14] *O. Bonnet*, J. éc. pol. 32e cah. (1848), S. 70.
[15] Vgl. Fußnote [11], III, S. 311.

Wir können diese Sätze nicht nur in die elliptische Geometrie übertragen, sondern auch auf beliebige Kurvenscharen, wie folgt, verallgemeinern:

Besitzt eine Kurve S auf einer Fläche drei von den folgenden vier Eigenschaften, so besitzt sie auch die vierte Eigenschaft. Diese Eigenschaften sind:

a) *S ist geodätische Linie*, dann ist also wegen (25), (33) und (35)

$$c = \frac{\beta_3 + d\tau}{d\sigma_0} = \frac{\beta_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_1 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{3/2}} = 0$$

b) *S ist isogonale Trajektorie einer auf der Fläche liegenden Kurvenschar*, etwa der Schar $\alpha_2 = 0$. Daher ist (55) erfüllt.

c) *S ist Striktionslinie dieser Kurvenschar* $\alpha_2 = 0$. Es gilt somit (50).

d) *S ist Ort der Punkte, in denen die geodätische Krümmung der Scharkurven verschwindet.* Wegen (52) gilt dann

$$\overline{d\,\alpha_1} = \overline{[\beta_3\,\alpha_2]} = B_{31}A_{22} - B_{32}A_{21} = 0$$

Man folgert nun tatsächlich leicht aus je drei dieser Eigenschaften die Vierte.

Nun fassen wir wiederum eine geodätische Kurvenschar auf einer Fläche ins Auge. Wir können dann den *Pfaff*schen Formen α_i eine besonders einfache Gestalt geben:

$$\alpha_1 = du_1,\ \alpha_2 = A_{22}\,du_2 \tag{59}$$

also $A_{11} = 1$, $A_{12} = A_{21} = 0$. Es gilt daher $\Phi_0 = [\alpha_1\,\alpha_2] = A_{22}\,[du_1\,du_2]$

$$d\alpha_1 = [\beta_3\,\alpha_2] = 0,\ d\alpha_2 = [\alpha_1\,\beta_3] = \frac{\partial A_{22}}{\partial u_1}\,[du_1\,du_2] \tag{60}$$

und wegen (31) $\beta_3 = \dfrac{\partial A_{22}}{\partial u_1}\,du_2$ also $B_{31} = 0$, $B_{32} = \dfrac{\partial A_{22}}{\partial u_1}$

Die geodätische Krümmung der Scharkurven $\alpha_2 = 0$, also der Kurven $u_2 =$ konst. verschwindet somit tatäschlich, wie (52) zeigt. Das Bogenelement der Fläche hat die „*Gauß*sche" Gestalt:

$$d\sigma_0^2 = du_1^2 + A_{22}^2\,du_2^2 = du_1^2 + G\,du_2^2$$
$$E = 1,\ F = 0,\ G = G(u_1, u_2) = A_{22}^2$$

und der Parameter u_1 stellt die Bogenlänge der Kurven der Schar $u_2 =$ konst. gemessen von der Kurve $u_1 = 0$ dar.

Die Gleichung (50) der Striktionslinie vereinfacht sich auf

$$B_{32} = \frac{\partial A_{22}}{\partial u_1} = 0$$

Setzen wir nun die Auflösbarkeit dieser Gleichung nach u_1 voraus

$$u_1 = w(u_2),$$

so beschreiben die Punkte $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0(w(u_2), u_2)$ die Striktionslinie S, wobei u_2 als Parameter fungiert.

Wie in der Euklidischen Geometrie tragen wir nun auf jeder geodätischen Scharkurve vom Punkt ihrer Striktionslinie S aus nach beiden Seiten die gleiche Entfernung t ab und erhalten so im allgemeinen zwei Kurven, die wir als *ein Paar entsprechender Abstandskurven* der Striktionslinie bezeichnen wollen. Ihre Parameterdarstellung ist

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0(w(u_2) + t, u_2) \text{ und } \mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0(w(u_2) - t, u_2)$$

Hier ist $t =$ konst. und u_2 dient als Parameter. Wir beweisen nun den Satz:

Die beiden folgenden Eigenschaften einer Schar geodätischer Linien mit der Striktionslinie S bedingen sich wechselseitig:

1. *Die Paare entsprechender Abstandskurven der Striktionslinie S werden durch die auf den einzelnen Scharkurven liegenden Punkte isometrisch auf einander bezogen; je zwei entsprechende Abstandskurven haben gleiche Bogenlänge.*
2. *Die Kurven einer Isogonalschar (im besonderen Orthogonalschar) der geodätischen Kurvenschar besitzen in den Punkten eines Paares entsprechender Abstandskurven der Striktionslinie S entgegengesetzt gleiche geodätische Krümmung.*

Die Eigenschaft 1) führt zu

$$\left[\left(\frac{dw}{du_2}\right)^2 + G(w(u_2)+t, u_2)\right] du_2^2 = \left[\left(\frac{dw}{du_2}\right)^2 + G(w(u_2)-t, u_2)\right] du_2^2$$

oder

$$G(w(u_2)+t, u_2) = G(w(u_2)-t, u_2) \tag{61}$$

also zur Bedingung, daß $g(t, u_2) = G(w(u_2)+t, u_2)$ in t gerade ist. Die geodätische Krümmung c_τ der Kurven einer Isogonalschar wird durch (56) gegeben. Wegen $c_0 = 0$ und (60) vereinfacht sich dies auf

$$c_\tau = c_{\frac{\pi}{2}} \sin\tau = \frac{B_{32}}{A_{22}} \sin\tau = \frac{\frac{\partial A_{22}}{\partial u_1}}{A_{22}} \sin\tau = \frac{\frac{\partial G}{\partial u_1}}{2G} \sin\tau = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_1}(\ln G)\sin\tau.$$

Da die Ableitungen der in t geraden Funktionen $g(t, u_2)$ und damit auch $\ln g(t, u_2)$ in t ungerade sind, weisen unter der Voraussetzung (61) die

einzelnen isogonalen Trajektorien in den Punkten eines Paares entsprechender Abstandskurven tatsächlich entgegengesetzt gleiche geodätische Krümmung auf. Wie in der Euklidischen Geometrie schließen wir aber auch umgekehrt aus dieser Eigenschaft auf (61). (Integration einer ungeraden Funktion)[16].

3. Über Striktionslinien von Geradenscharen.

Wir betrachten nun im elliptischen Raum P_3 eine Regelfläche, also eine einparametrige Geradenschar und untersuchen deren Striktionslinie. Hierzu denken wir uns einen Polarvierling $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ einer solchen Bewegung unterworfen, daß die Kante $G_3 = \{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_3\}$ die Regelschar — wir bezeichnen sie mit Ψ_3 — durchläuft, während die dazu normalen Kanten $G_1 = \{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1\}$ und $G_1^* = \{\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3\}$ auch die benachbarte Erzeugende der Schar senkrecht schneiden, also

$$\omega_2 = (\mathfrak{r}_1\, d\mathfrak{r}_3) = 0,\ \omega_2' = (\mathfrak{r}_1'\, d\mathfrak{r}_3') = 0 \tag{62}$$

erfüllt sein möge[17]. Dann gilt bei Abhängigkeit von einem Parameter u_2, also $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_i(u_2)$, $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_i(u_2)$ $\mathfrak{r}_i' = \mathfrak{r}_i'(u_2)$ das folgende System von Ableitungsgleichungen (vgl. auch (13) und (14)!).

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{P}_0 &= \quad . \quad + \alpha_1 \mathfrak{P}_1 \quad . \quad + \alpha_3 \mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_1 &= -\alpha_1 \mathfrak{P}_0 \quad . \quad + \beta_3 \mathfrak{P}_2 \quad . \\ d\,\mathfrak{P}_2 &= \quad . \quad - \beta_3 \mathfrak{P}_1 \quad . \quad + \beta_1 \mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_3 &= -\alpha_3 \mathfrak{P}_0 \quad . \quad - \beta_1 \mathfrak{P}_2 \quad . \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{r}_1 &= \quad . \quad + \omega_3 \mathfrak{r}_2 \quad . & d\,\mathfrak{r}_1' &= \quad . \quad + \omega_3' \mathfrak{r}_2' \quad . \\ d\,\mathfrak{r}_2 &= -\omega_3 \mathfrak{r}_1 \quad . \quad + \omega_1 \mathfrak{r}_3 & d\,\mathfrak{r}_2' &= -\omega_3' \mathfrak{r}_1' \quad . \quad + \omega_1' \mathfrak{r}_3' \\ d\,\mathfrak{r}_3 &= \quad . \quad - \omega_1 \mathfrak{r}_2 \quad . & d\,\mathfrak{r}_3' &= \quad . \quad - \omega_1' \mathfrak{r}_2' \quad . \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Obige Wahl des begleitenden Polartetraeders besitzt den Vorteil, daß die Eckpunkte $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_3$ als Fußpunkte der gemeinsamen Normalen G_1 und G_1^* eines Paares benachbarter Erzeugenden von Ψ_3 zu *Kehl- oder Zentralpunkten* der Erzeugenden G_3 werden. Es beschreibt somit $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_3$ die aus zwei Zweigen bestehende Striktionslinie der Regelfläche, wenn die Definition der Striktionslinie im Sinne von *G. Monge* zugrunde gelegt wird, bei der wir allerdings den Einbettungsraum der Regelfläche betreten. Die *Kehlnormalen oder Zentraltangenten*

[16] Vgl. Fußnote [1], S. 109.
[17] Vgl. Fußnote [3], S. 44.

G_1 und G_1^* beschreiben zwei Regelflächen Ψ_1 und Ψ_1^*, wenn G_3 die Regelschar Ψ_3 durchläuft. Für diese *Zentraltangentenflächen* Ψ_1 und Ψ_1^* ist nach *E. Study* auch die Bezeichnung *Striktionsband* üblich. Ψ_1 und Ψ_1^* berühren längs der Striktionslinien $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_3$ die Fläche Ψ_3 und besitzen selbst die von G_3 und G_3^* beschriebenen Flächen, also Ψ_3 und Ψ_3^* zu Zentraltangentenflächen. Dies ist eine einfache Folge von (12) und (64). Wir haben somit *zwei von dem selbstpolaren Vierseit* G_1, G_1^*, G_3, G_3^* *beschriebene Paare polarer Regelflächen* Ψ_1, Ψ_1^* *und* Ψ_3, Ψ_3^*, *die zu einander in der Beziehung stehen, daß jede Fläche eines Paares polarer Regelscharen die beiden polaren Flächen des anderen Paares zu Striktionsbändern besitzt*[18].

Die Übereinstimmung der *Monge*schen Definition der Striktionslinie mit der in 2 gegebenen *„innergeometrischen"* Erklärung wird nun leicht bestätigt.

Eine Parameterdarstellung der Punkte unserer Regelfläche wird durch

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\varphi, u_2) = \mathfrak{P}_0(u_2)\cos\varphi - \mathfrak{P}_3(u_2)\sin\varphi \tag{65}$$

gegeben; für $u_2 =$ konst. durchläuft $\mathfrak{P}$ die Erzeugende G_3 ($o \leqq \varphi < \pi$). Zufolge (63) ergibt sich

$$d\mathfrak{P} = (\alpha_3 - d\varphi)(\mathfrak{P}_0 \sin\varphi + \mathfrak{P}_3 \cos\varphi) + \alpha_1 \mathfrak{P}_1 \cos\varphi + \beta_1 \mathfrak{P}_2 \sin\varphi$$

und daher für das Bogenelement der Fläche $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\varphi, u_2)$

$$d\sigma^2 = (d\mathfrak{P}\, d\mathfrak{P}) = (\alpha_3 - d\varphi)^2 + \alpha_1^2 \cos^2\varphi + \beta_1^2 \sin^2\varphi \tag{66}$$

oder bei Einführung der zu (26) analogen Bezeichnungen

$$\alpha_i = A_i\, du_2\ ,\ \beta_i = B_i\, du_2$$

$$d\sigma^2 = d\varphi^2 - 2A_3\, d\varphi\, du_2 + (A_3^2 + A_1^2 \cos^2\varphi + B_1^2 \sin^2\varphi)\, du_2^2$$

Da im allgemeinen $F = -A_3$ nicht verschwindet, schneiden sich die Parameterlinien $\varphi =$ konst. und $u_2 =$ konst. nicht unter rechtem Winkel. Die Substitution

$$\varphi = \int \alpha_3 + u_1 = \int A_3\, du_2 + u_1$$

führt jedoch auf

$$d\mathfrak{P} = -(\mathfrak{P}_0 \sin\varphi + \mathfrak{P}_3 \cos\varphi)\, du_1 + \alpha_1 \mathfrak{P}_1 \cos\varphi + \beta_1 \mathfrak{P}_2 \sin\varphi$$

und somit

$$d\sigma^2 = du_1^2 + \alpha_1^2 \cos^2\varphi + \beta_1^2 \sin^2\varphi = du_1^2 + (A_1^2 \cos^2\varphi + B_1^2 \sin^2\varphi)\, du_2^2$$

[18] Im Euklidischen Raum gilt der Satz von *M. Chasles*, Corr. math. phys. (Quetelet) XI (1839), Nr. 16—21, S. 61: Sucht man vom Striktionsband einer Regelfläche, die keine Richtebene besitzt, wieder das Striktionsband, so kommt man auf die Ausgangsfläche zurück.

also zu einem Netz orthogonaler Parameterlinien $u_1 =$ konst., $u_2 =$ konst. Das Bogenelement besitzt nun die *Gauß*sche Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} d\sigma^2 &= du_1^2 + G\,du_2^2 \\ E = 1, F = 0, G &= A_1^2 \cos^2(\int \alpha_3 + u_1) + B_1^2 \sin^2(\int \alpha_3 + u_1) \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Die Geradenschar $u_2 =$ konst. unserer Regelfläche besitzt nach 2 die Striktionslinie mit der Gleichung $\frac{\partial}{du_1}\sqrt{G(u_1, u_2)} = 0$ oder, falls $G \neq 0$,

$$\frac{\partial G}{\partial u_1} = G_1 = 2(B_1^2 - A_1^2)\sin(\int A_3 du_2 + u_1)\cos(\int A_3 du_2 + u_1) = (B_1^2 - A_1^2)\sin 2\varphi = 0 \quad (68)$$

$\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ führt nun tatsächlich zu den Kehlpunkten $\mathfrak{P}_0$ bzw. $\mathfrak{P}_3$; *die Striktionslinie der Regelfläche besteht daher im allgemeinen aus zwei Zweigen*, den Kurven $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0(u_2)$ und $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}_3(u_2)$.

Wir bilden

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u_1^2} = \frac{2GG_{11} - G_1^2}{4G\sqrt{G}} = \frac{(B_1^2 - A_1^2)(A_1^2\cos^4\varphi - B_1^2\sin^4\varphi)}{(A_1^2\cos^2\varphi + B_1^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \quad (69)$$

Dieser Ausdruck nimmt wegen $\sqrt{G} > 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ entgegengesetzte Vorzeichen an. Ein Zweig der Striktionslinie ist daher *Stauungslinie*, der andere *Einschnürungslinie*. Für $A_1^2 > B_1^2$ wird $\mathfrak{P}_0(u_2)$ Stauungslinie und $\mathfrak{P}_3(u_2)$ Einschnürungslinie; ist jedoch umgekehrt $A_1^2 < B_1^2$, so vertauschen die beiden Kurven ihre Rollen.

Unbestimmt wird die Striktionslinie, ihre Gleichung (68) also identisch erfüllt, falls $A_1^2 = B_1^2$ oder $\alpha_1 = \pm\beta_1$ ausfällt. Dann ist aber $\omega_1' = 0$ bzw. $\omega_1 = 0$, also $\mathfrak{r}_3' =$ konst. bzw. $\mathfrak{r}_3 =$ konst.

Im ersten Fall sind sämtliche Erzeugende rechtsparallel, die Regelfläche also ein *Rechtszylinder*, im zweiten Fall erhalten wir eine Schar linksparalleler Erzeugenden eines *Linkszylinders*. Auch die *Monge*sche Definition der Kehlpunkte versagt, da zwei benachbarte Erzeugende nun nicht zwei, sondern eine eingliedrige Schar gemeinsamer Normalen besitzen, die im ersten Fall links-, im zweiten Fall rechtsparallel sind.

Wir berechnen nun das *Gauß*sche *Krümmungsmaß* K in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}$ unserer Regelfläche. Formel (32) führt[19] für das *Gauß*sche Bogenelement (67) zu

[19] In der Bezeichnung von Formel (32) haben wir nur zu setzen: $\alpha_1 = du_1$, $\alpha_2 = \sqrt{G}\,du_2$.

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u_1^2} = \frac{G_1^2 - 2GG_{11}}{4G^2} \tag{70}$$

Wegen (69) ergibt sich somit

$$K = \frac{(A_1^2 - B_1^2)(A_1^2 \cos^4\varphi - B_1^2 \sin^4\varphi)}{(A_1^2 \cos^2\varphi + B_1^2 \sin^2\varphi)^2} = 1 - \frac{A_1^2 B_1^2}{(A_1^2 \cos^2\varphi + B_1^2 \sin^2\varphi)^2} \tag{71}$$

Obige Rechts- und Linkszylinder sind also dadurch gekennzeichnet, daß das Krümmungsmaß $K = 0$ wird; sie sind also (im Kleinen) auf die *Euklidische* Ebene längentreu abbildbar oder nach *L. Bianchi* „*abwickelbare*" Regelflächen im elliptischen Raum.

Der von $\mathfrak{P}_i(u_2)$ $(i = 0,3)$ beschriebene Zweig der Striktionslinie ist nach (69) *Stauungslinie* oder *Einschnürungslinie*, je nachdem ob das Krümmungsmaß K längs dieser Kurve positiv oder negativ ist.

Die betrachtete Regelfläche wird zur *Tangentenfläche* einer Raumkurve, wenn benachbarte Gerade der Regelschar sich schneiden, also

$$(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_3, d\,\mathfrak{P}_0, d\,\mathfrak{P}_3) = 0$$

ausfällt. Für eine *Torse* ist somit die Bedingung $\alpha_1 \beta_1 = 0$ charakteristisch. Für $\alpha_1 = 0$ fungiert die Kurve $\mathfrak{P}_0(u_2)$, für $\beta_1 = 0$ die Kurve $\mathfrak{P}_3(u_2)$ als *Gratlinie* der Fläche. Für eine Torse gilt nach (71) die kennzeichnende Bedingung $K = 1$. Es gibt somit *auf einer Torse neben der Gratlinie immer noch eine Stauungslinie* als nicht ausgearteten Zweig des Striktionsgebildes. Für die Tangentenfläche von $\mathfrak{P}_0(u_2)$ wird $\mathfrak{P}_3(u_2)$ Stauungslinie und umgekehrt. Für Torsen degeneriert also immer die Einschnürungslinie zur Gratlinie.

Betrachten wir nun das Krümmungsmaß (71) in den Punkten einer Erzeugenden $u_2 =$ konst. unserer Regelfläche, so erkennen wir, daß die Kehlpunkte, ähnlich wie im Euklidischen Raum, dadurch gekennzeichnet sind, daß in ihnen das Krümmungsmaß einen extremen Wert besitzt; und zwar wird K ein Maximum oder Minimum annehmen, je nachdem ob $G = A_1^2 \cos^2\varphi + B_1^2 \sin^2\varphi$ ein Maximum oder Minimum aufweist. Wir sind somit auf Bedingung (69) geführt und sehen, daß *die maximalen Werte von K für Stauungslinien, die minimalen Werte für Einschnürungslinien charakteristisch* sind.

Weiters können wir die Striktionslinie einer Regelfläche auch dadurch kennzeichnen, daß für sie die Bogenlänge als Funktion der auf den Erzeugenden stattfindenden Verschiebung ein Extremum wird. Wegen (67) werden wir ja auf die Extremwerte von G als Funktion von u_1 geführt.

Wir betrachten nun *Abstandskurven* der Striktionslinien im Sinne der Erklärung von 2. In der Darstellung (65) der Punkte unserer Regelfläche mißt φ die Abstände auf den Erzeugenden $u_2 = \text{konst.}$ Es führen daher die Werte $\varphi = \varphi_0 = \text{konst.}$ und $\varphi = -\varphi_0$ zu einem Paar $\mathfrak{P}(\varphi_0, u_2)$ und $\mathfrak{P}(-\varphi_0, u_2)$ entsprechender Abstandskurven des Striktionslinienzweiges $\mathfrak{P}_0(u_2)$. Da wir im elliptischen Raum die Punkte $\mathfrak{P}$ und $-\mathfrak{P}$ nicht unterscheiden, sind diese zwei Kurven auch ein Paar entsprechender Abstandskurven des zweiten Zweiges $\mathfrak{P}_3(u_2)$ der Striktionslinie:

$$\mathfrak{P}(\pi + \varphi_0, u_2) = -\mathfrak{P}(\varphi_0, u_2),\ \mathfrak{P}(\pi - \varphi_0, u_2) = -\mathfrak{P}(-\varphi_0, u_2)$$

Die Bogenelemente und damit auch *die Bogenlängen entsprechender Abstandskurvenpaare beider Striktionslinienzweige stimmen überein*, wie ein Blick auf (66) lehrt. Daß wir umgekehrt, wie im Euklidischen Raum, *die Striktionslinie einer Regelfläche auch als Ort der Halbierungspunkte jener Strecken definieren können, die von zwei Kurven gleicher Bogenlänge auf den Erzeugenden ausgeschnitten werden*, läßt sich leicht folgern[20].

Führe $\varphi = \psi(u_2) + t$ und $\varphi = \psi(u_2) - t$ in (65) zu einem Kurvenpaar gleicher Bogenlänge, das auf den Erzeugenden der Regelfläche die konstante Strecke $2t \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$ ausschneide, so gilt wegen $d\varphi = d(\psi \pm t) = d\psi$ und (66)

$$\alpha_1^2 \cos^2(\psi + t) + \beta_1^2 \sin^2(\psi + t) = \alpha_1^2 \cos^2(\psi - t) + \beta_1^2 \sin^2(\psi - t)$$

oder

$$A_1^2 [\cos^2(\psi + t) - \cos^2(\psi - t)] + B_1^2 [\sin^2(\psi + t) - \sin^2(\psi - t)] = 0$$

Nach einfachen Umformungen finden wir aber

$$\sin^2(\psi + t) - \sin^2(\psi - t) = -[\cos^2(\psi + t) - \cos^2(\psi - t)] = \sin 2\psi \sin 2t$$

und somit die Bedingung

$$(B_1^2 - A_1^2) \sin 2\psi = 0 \text{ oder } \psi = 0, \frac{\pi}{2},$$

also tatsächlich die beiden Zweige der Striktionslinie als Ort der Halbierungspunkte.

Entsprechende Abstandskurven der Striktionslinie werden somit durch die auf den Erzeugenden der Regelschar liegenden Punkte isometrisch auf einander bezogen.

Dies legt nun die punktweise Abbildung der Regelfläche auf sich durch die Zuordnung der bezüglich der Striktionslinie symmetrisch

---

[20] Vgl. Fußnote [1], S. 110, sowie *K. Brauner* und *H. R. Müller*, Über Kurven, welche von den Endpunkten einer bewegten Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden. Math. Zeitschr., Bd. 47 (1941), S. 291.

liegenden Punkte $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\varphi, u_2)$ und $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}(-\varphi, u_2)$ nahe. Obwohl in entsprechenden Punkten, wie (71) zeigt, Übereinstimmung des Krümmungsmaßes stattfindet und das Netz der Erzeugenden und Abstandskurven der Striktionslinie isometrisch in sich abgebildet wird[21], ist diese Abbildung im allgemeinen keine Verbiegung, also isometrische Abbildung der Fläche in sich[22]. Das Bogenelement (66) der Flächendarstellung (65) stimmt nämlich nur dann mit dem Bogenelement

$$d\sigma^{*2} = (d\mathfrak{P}^*\, d\mathfrak{P}^*) = (\alpha_3 + d\varphi)^2 + \alpha_1^2 \cos^2\varphi + \beta_1^2 \sin^2\varphi \qquad (72)$$

des Punktes

$$\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}(-\varphi, u_2) = \mathfrak{P}_0(u_2)\cos\varphi + \mathfrak{P}_3(u_2)\sin\varphi$$

überein, wenn $\alpha_3 = 0$ ist. Wir werden gleich sehen, daß dies dann und nur dann der Fall ist, *wenn die Striktionslinie sämtliche Erzeugenden orthogonal schneidet, die Fläche also orthoid ist.* Sie ist dann wie im Euklidischen Raum, *die Binormalenfläche ihrer Striktionslinie und gestattet obige Verbiegung in sich*[23].

Schneiden die Erzeugenden der Regelschar (65) einen der beiden Striktionslinienzweige unter rechtem Winkel, so gilt dies auch für den anderen; zufolge (9) und (63) gilt nämlich

$$(\mathfrak{P}_3\, d\mathfrak{P}_0) = \alpha_3 = 0 \qquad (\mathfrak{P}_0\, d\mathfrak{P}_3) = -\alpha_3 = 0$$

$\alpha_3 = 0$ ist also nicht nur für die Orthogonalität der Erzeugenden und beider Striktionslinienzweige charakteristisch, sondern auch dafür, daß die Regelfläche die gemeinsame Binormalenschar dieser beiden Kurven ist. Die Ableitungsgleichungen (63) gehen nämlich dann in das System der Ableitungsgleichungen einer Raumkurve über, das den *Frenet*schen Formeln der Euklidischen Geometrie entspricht[24]:

$$\left.\begin{aligned} d\mathfrak{P}_0 &= \quad . \quad + \alpha_1 \mathfrak{P}_1 \quad . \quad . \\ d\mathfrak{P}_1 &= -\alpha_1 \mathfrak{P}_0 \quad . \quad + \beta_3 \mathfrak{P}_2 \quad . \\ d\mathfrak{P}_2 &= \quad . \quad - \beta_3 \mathfrak{P}_1 \quad . \quad + \beta_1 \mathfrak{P}_3 \\ d\mathfrak{P}_3 &= \quad . \quad . \quad - \beta_1 \mathfrak{P}_2 \quad . \end{aligned}\right\}$$

---

[21] Die Punkte der Striktionslinie sind Fixpunkte dieser Abbildung. Entsprechende Netzkurven schneiden sich unter Winkeln ϑ_i und $\vartheta_i^* = \pi - \vartheta_i$. Die Abbildung ist auch flächentreu, da die Flächenelemente (29) der quadratischen Formen (66) und (72) übereinstimmen. ($E^* = E = 1$, $F^* = -F = A_3$, $G^* = G = A_3^2 + A_1^2 \cos^2\varphi + B_1^2 \sin^2\varphi$).

[22] Vgl. für die Euklidische Geometrie *K. Brauner* und *H. R. Müller* (Fußnote [20]).

[23] Vgl. *A. Barré de Saint-Venant*, J. éc. pol. 30e cah. (1845), S. 48.

[24] Vgl. Fußnote [3], S. 34.

oder in Hinblick auf die Kurve $\mathfrak{P}_3(u_2)$ geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} d\mathfrak{P}_3 &= \quad . \quad -\beta_1\mathfrak{P}_2 \quad . \quad . \\ d\mathfrak{P}_2 &= +\beta_1\mathfrak{P}_3 \quad . \quad -\beta_3\mathfrak{P}_1 \quad . \\ d\mathfrak{P}_1 &= \quad . \quad +\beta_3\mathfrak{P}_2 \quad . \quad -\alpha_1\mathfrak{P}_0 \\ d\mathfrak{P}_0 &= \quad . \quad . \quad +\alpha_1\mathfrak{P}_1 \quad . \end{aligned}\right\}$$

Hierbei sind $\frac{\beta_3}{\alpha_1} = \varkappa_0$ die Krümmung und $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \tau_0$ die Torsion der Raumkurve $\mathfrak{P}_0(u_2)$ bzw. $\frac{\beta_3}{\beta_1} = \varkappa_3$ und $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \tau_3$ Krümmung und Torsion von $\mathfrak{P}_3(u_2)$. $G_3 = \{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_3\}$ ist tatsächlich gemeinsame Binormale beider Striktionslinienzweige.

Wir sehen nebenbei, daß für die Torsionen τ_0 und τ_3 der beiden Striktionslinienzweige $\mathfrak{P}_0(u_2)$ und $\mathfrak{P}_3(u_2)$ einer orthoiden Regelfläche die Beziehung $\tau_0\,\tau_3 = 1$ gilt. — Die für die orthoiden Flächen kennzeichnende Eigenschaft $\alpha_3 = 0$ hat aber auch zur Folge:

Die beiden von G_1 bzw. G_1^* durchlaufenen Zentraltangentenflächen Ψ_1 und Ψ_1^* der orthoiden Regelschar Ψ_3 sind Torsen.

Es gilt dann nämlich

$$(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, d\mathfrak{P}_0, d\mathfrak{P}_1) = 0 \text{ und } (\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, d\mathfrak{P}_2, d\mathfrak{P}_3) = 0$$

Da diese Bedingungen mit $\alpha_3\beta_3 = 0$ äquivalent sind, gilt auch die Umkehrung, falls nur $\beta_3 \neq 0$.

Zum Konvergenzverhalten gewisser trigonometrischer Reihen.

Von

Leopold Schmetterer, Wien.

(Eingelangt am 8. Februar 1947.)

1.

Wir betrachten Reihen der Form

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

und wollen das Konvergenzverhalten von (1) im Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ unter folgenden Voraussetzungen über die Folgen a_k und b_k studieren:

Es sei stets

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0 \tag{2}$$

und

$$\lim_{k \to \infty} b_k = 0 \tag{2'}$$

und da es sich um Konvergenzbetrachtungen handelt o. B. d. A. $a_0 = 0$. Voraussetzung (2) und (2') reichen jedoch nicht aus, um ein typisches Konvergenzverhalten von (1) erkennen zu lassen[1]. Wir wollen daher noch verlangen, daß immer

$$|a_{i+1}| \leqq |a_i| \tag{3}$$

bzw.

$$|b_{i+1}| \leqq |b_i| \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{3'}$$

gilt.

---

[1] Reihen, welche (2) und (2') genügen, können z. B. im ganzen Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ konvergieren oder in $0 < x < \frac{\pi}{2} - \epsilon$, $\frac{3\pi}{2} + \epsilon < x < 2\pi$ konvergieren und in $\frac{\pi}{2} + \epsilon < x < \frac{3\pi}{2} - \epsilon$ ($\epsilon > 0$, beliebig klein) divergieren oder auch im ganzen Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ divergieren. *H. Steinhaus* gibt als erster ein Beispiel einer solchen Reihe, welche in $0 \leqq x < 2\pi$ divergiert (C. R. de la Societé Scientifique de Varsovie, 1912, V. Anneé, Fasc. 3).

Wir beschränken uns zunächst auf Reihen der Gestalt

$$\sum_1^\infty a_k \cos kx \tag{4}$$

und betrachten im folgenden nur solche Reihen (4), welche (2) und (3) erfüllen, ohne daß dies weiterhin immer ausdrücklich formuliert wird.

Die Beweise werden jedoch so geführt werden, daß ersichtlich ist, inwieweit die angeführten Sätze auch für Reihen

$$\sum_1^\infty b_k \sin kx \tag{5}$$

gelten oder modifiziert werden müssen. Wir kommen am Schluß der Arbeit kurz darauf zurück

2.

In Richtung unserer Untersuchungen ist meines Wissens nur folgendes auf absolute Konvergenz bezügliche Ergebnis bekannt:

Satz 1: Wenn (4) für $x = 0$ absolut konvergiert, dann ist dies trivialer Weise auch im ganzen Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ der Fall. Es gilt notwendig $\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$ und (4) ist die überall gleichmäßig und absolut konvergente *Fourier*sche Reihe einer stetigen Funktion[2].

Aber sogar aus der absoluten Konvergenz an einer beliebigen Stelle folgt die absolute Konvergenz im ganzen Periodizitätsintervall[3].

Wir wollen nun eine unmittelbare Folgerung aus Satz 1 ziehen und führen hiezu folgende Bezeichnung ein:

Wie üblich, bezeichne $[x]$ die nächstkleinere ganze Zahl von x; wir definieren dann für ein festes θ aus dem Intervall $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ natürliche Zahlen n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ wie folgt:

$$n_1 = \left[\frac{\pi}{2\theta}\right] \text{ und } n_k = \left[\frac{(2k-1)\pi}{2\theta}\right] - \left[\frac{(2k-3)\pi}{2\theta}\right] \quad k = 2, 3, \ldots$$

Mit dieser Bezeichnung behaupten wir

Satz 2: Es mögen in einer Reihe (4) auf n_{2k-1} positive, n_{2k} negative Koeffizienten folgen. $(k = 1, 2, \ldots)$. Dann folgt aus der Konvergenz an der Stelle θ die absolute Konvergenz im ganzen Intervall.

---

[2] Vgl. etwa Zygmund, „Trigonometrical Series", Monografje Matematyczne Warszawa-Lwow 1935, S. 131.

[3] *P. Fatou*, „Sur la convergence absolue des séries trigonometriques". Bulletin de la Societé Mathématique de France, t. XLI (1913), p. 47—53.

Beweis:

Man betrachte die Vorzeichen der Glieder der Folge $\cos kx$ an dieser Stelle. Dieses stimmt entweder genau mit dem Signum von a_k überein oder $\cos k\theta$ verschwindet. In jedem Falle ist

$$a_k \cos k\theta = |a_k||\cos k\theta|$$

und somit ergibt sich nach Satz 1 die Behauptung.

Wir wollen noch auf die Bauart solcher Reihen (4) eingehen, welche den Voraussetzungen des Satzes 2 genügen und hiezu die Verteilung der positiven und negativen Vorzeichen der Koeffizienten untersuchen.

Wir zeigen:

Wenn θ das Intervall $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ durchläuft, ist $1 \leqq n_1 < \infty$. Außerdem gilt immer

$$n_k = 2\,n_1 + \gamma_k \qquad (\gamma_k = 0, 1, 2)$$

und

$$|n_k - n_{k+1}| \leqq 1 \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

Die Anzahlen der gleichbezeichneten Koeffizienten a weichen also von einem Index an höchstens um 1 voneinander ab.

Was nun die Ungleichung $1 \leqq n_1 < \infty$ anbelangt, folgt dies unmittelbar aus der Definition von $\left[\frac{\pi}{2\,\theta}\right]$.

Um die beiden nachfolgenden Behauptungen zu beweisen, führen wir die Bezeichnung ein

$$\alpha = \frac{\pi}{2\,\theta} - n_1$$

so daß also $0 \leqq \alpha < 1$ gilt.

Dann ist

$$\gamma_k = [(2k-1)\,\alpha] - [(2k-3)\,\alpha] \tag{6}$$

Für geeignetes ganzes $l \geqq 0$ ist

$$l \leqq (2k-1)\,\alpha < l + 1.$$

Wegen $2\alpha < 2$ ist also immer $l - 2 < (2k-3)\,\alpha$. Daraus folgt sofort, daß γ_k höchstens die Werte 0, 1, 2, annehmen kann und durch

geeignete Wahl von α sieht man ein, daß diese Werte auch tatsächlich auftreten[4].

Es bleibt zu zeigen übrig, daß

$$|n_k - n_{k+1}| \leqq 1.$$

Gleichbedeutend damit ist: Wenn einmal $\gamma_k = 0$, dann gilt niemals $\gamma_{k+1} = 2$ und aus $\gamma_k = 2$ folgt niemals $\gamma_{k+1} = 0$. Da sich die Beweise der beiden Behauptungen (aus Symmetriegründen) völlig analog gestalten, mag es genügen die erste zu beweisen.

Es ist nun wegen (6) und wegen $\gamma_k = 0$ für geeignetes ganzes l

$$\frac{l}{2k-3} \leqq \alpha < \frac{l+1}{2k-1}$$

Aus dieser Ungleichung schließt man sofort auf

$$0 \leqq l \leqq k-2$$

Aus $\frac{l+2}{2k+1} < \frac{l+1}{2k-1}$ erhielte man aber $k-1 \leqq l$, womit alles bewiesen ist.

Für die Intervalle $\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ gestaltet sich alles analog.

Wir bemerken noch: Wählt man für die Stelle θ des Satzes $\frac{\pi}{2g}$ ($g > 0$, ganz), dann erhält man Reihen (4), für die von einem Index an immer $2g$ gleichbezeichnete Koeffizienten aufeinander folgen. Für $\theta = \frac{\pi}{2g+1}$ ergeben sich je $2g+1$ Koeffizienten gleichen Vorzeichens.

---

[4] Die γ_k streben im Mittel gegen 2 α. Man bezeichne nämlich die Anzahl der Zeichenwechsel in der endlichen Folge cos x, cos 2x, ..., cos nx mit $p_n(x)$. Dann gilt *G. Polya* und *G. Szegö*, „Aufgaben und Lehrsätze"

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n(x)}{n} = \frac{x}{\pi}$$

Für beliebiges n gilt mit geeignetem r ($0 \leqq r \leqq 2n_{p_{n+1}} + \gamma_{p_n} - 1$).

$$n = 2p_n n_1 + \sum_{k=1}^{p_{n-1}} \gamma_k + r - n_1$$

Daraus ergibt sich $\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{n} = \frac{1}{2n_1}\left(1 - \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{p_n} \gamma_k \cdot p_n}{n \cdot p_n}\right)$ und $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{p_n} \sum_{p_n}^{p_n} \gamma_k = \frac{\pi}{x} - 2\left[\frac{\pi}{2x}\right] = 2\alpha$

3.

Wir schließen von nun an die Möglichkeit aus, daß eine Stelle absoluter Konvergenz im Periodizitätsintervall von (4) existiert. Die am Ende des § 2 gemachte Bemerkung legt den Gedanken nahe, daß Reihen (4), deren Koeffizientenfolge „regelmäßige" Vorzeichenwechsel aufweist, auch ohne Bezugnahme auf absolute Konvergenz ein typisches Konvergenzverhalten zeigen. Man kann z. B. für alle Reihen der im Satz 2 erwähnten Form unter Annahme einer beliebigen Stelle bedingter Konvergenz $\neq \theta$, θ als Divergenzstelle erkennen. Zur Erzielung ähnlicher und allgemeinerer Resultate formulieren wir den bekannten

Satz 3: Haben die Koeffizienten von (4) einerlei Signum und ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent, dann konvergiert die Reihe für jedes $0 < \theta < \pi$ in $[\theta, 2\pi - \theta]$[5] gleichmäßig, aber nicht absolut[6].

Die Reihe muß übrigens nicht die *Fourier*sche Reihe einer L-integrierbaren Funktion sein[7].

Wir zeigen nun

Satz 4: Es mögen in einer Reihe (4) abwechselnd auf p positive stets q negative Koeffizienten folgen. $(p, q > 0)$. $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ sei divergent. Dann gilt:

1. In allen Punkten des Intervalles $[0, 2\pi)$, welche nicht von der Form $\frac{2\pi k}{p+q}$ $k = 0, 1, \ldots, (p+q-1)$ sind, herrscht Konvergenz. Die Konvergenz ist mindestens in allen abgeschlossenen Intervallen, welche in $\left(\frac{2\pi k}{p+q}, \frac{2\pi(k+1)}{p+q}\right)$ enthalten sind, gleichmäßig.

2. Für $p \neq q$ herrscht im Nullpunkt Divergenz, für $p = q$ Konvergenz.

3. An den Stellen $\frac{2\pi k}{p+q} (k = 1, 2, \ldots, (p+q-1))$ ist die Reihe divergent, wenn nicht einer der unter 4. formulierten Umstände eintritt.

---

[5] Wir bezeichnen abgeschlossene Intervalle durch eckige und offene Intervalle durch runde Klammern.

[6] Vgl. *Zygmund*, „Trigonometrical Series", S. 3.

[7] *S. Szidon*, „Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen", Math. Zeitschrift, 10 (1921), S. 121—127.

4. Es sei:

a) s der größte gemeinsame Teiler von p und q. Setzt man dann $p = s\,l_1$, $q = s\,l_2$,
so daß also $(l_1, l_2) = 1$ (rel. prim), dann ist für $k = (l_1 + l_2)\,l$ $\left(l = 1, 2, \ldots, \left[\frac{p+q-1}{l_1+l_2}\right]\right)$
$\frac{2\pi k}{p+q}$ Konvergenzstelle.

b) r der größte gemeinsame Teiler von $p+1, q-1$.
Es sei $p+1 = l_3\,r$, $q-1 = l_4\,r$ und l_3, l_4, beide ungerade und relativ prim. Dann ergeben sich für $k = \frac{l_3+l_4}{2}\,l$ die Konvergenzstellen $\frac{2\pi k}{p+q}$, wobei l alle ungeraden Zahlen durchläuft, welche kleiner oder gleich $\left[\frac{2(p+q-1)}{l_3+l_4}\right]$ sind.

Beweis:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ genüge den Voraussetzungen des Satzes. Gemäß Satz 3 konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cos kx$$

in jedem in $(0, 2\pi)$ enthaltenen abgeschlossenen Intervall gleichmäßig. Somit sind die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|) \cos kx =$$

$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_{(k-1)(p+q)+1} \cos[(k-1)(p+q)+1]x + \ldots + a_{(k-1)(p+q)+p}$ $\cos[(k-1)(p+q)+p]x)$ in jedem Intervall $[\theta, 2\pi-\theta]$ $0 < \theta < \pi$ vom selben Konvergenzverhalten.

Es genügt also Reihen der Form

$$(7)\ \sum_{k-1}^{\infty} (a_{(k-1)(p+q)+1}\, e^{ix[(k-1)(p+q)+1]} + \ldots + a_{(k-1)(p+q)+p}\, e^{ix[(k-1)(p+q)+p]})$$

zu betrachten. Die komplexe Schreibweise wird im Hinblick auf die Anwendung auf Reihen (5) eingeführt.

Die Koeffizienten a von (7) haben durchwegs positives Vorzeichen und streben monoton gegen 0. Nach dem Kriterium von *Dirichlet* ist also nachzuweisen, daß

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (e^{ix[(k-1)(p+q)+1]} + \ldots + e^{ix[(k-1)(p+q)+p]}) + \sum_{k=1}^{m} e^{ix[n(p+q)+k]} \right|$$

für jedes $n \geqq 0$ und $0 \leqq m \leqq \left[\frac{p+1}{2}\right]$ beschränkt bleibt, höchstens beliebig kleine Umgebungen der Stellen $\frac{2\pi k}{p+q}$ $(k = 0, 1, \ldots, (p+q-1)$ ausgenommen.

Nun ist:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{ix[(k-1)(p+q)+1]} \frac{e^{ixp}-1}{e^{ix}-1} + \sum_{k=1}^{m} e^{i[n(p+q)+k]x} \right| \leqq \left| \frac{e^{ipx}-1}{e^{ix}-1} \right| \left| \frac{e^{i(p+q)nx}-1}{e^{i(p+q)x}-1} \right| + \left[\frac{p+1}{2}\right] \leqq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \frac{1}{\left|\sin\frac{(p+q)x}{2}\right|} + \left[\frac{p+1}{2}\right]$$

Ist aber für ein θ mit $0 < \theta < \frac{\pi}{p+q}$

$$\frac{2\pi k}{p+q} + \theta \leqq x \leqq \frac{2\pi(k+1)}{p+q} - \theta \qquad k = 0, 1, \ldots, (p+q-1)$$

läßt sich weiter abschätzen:

$$\leqq \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \frac{1}{\sin\frac{(p+q)\theta}{2}} + \left[\frac{p+1}{2}\right]$$

Damit ist aber die gleichmäßige Konvergenz im angegebenen Umfang nachgewiesen.

2. Es sei $p \neq q$, z. B. $p > q$.

Für beliebiges $n = k(p+q)+m$, $(k = 0, 1, \ldots, 0 \leqq m \leqq (p+q-1))$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{i=0}^{k-1} a_{i(p+q)+p}$$

$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i(p+q)+p}$ ist aber divergent.

Andernfalls wäre auch $pa_1 + \sum_{i=0}^{\infty} 2pa_{i(p+q)+p}$ konvergent im Widerspruch zur Divergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$.

Für $p = q$ ergibt sich die Konvergenz im Nullpunkt unmittelbar aus dem *Leibniz*schen Kriterium für alternierende Reihen.

3. Um die Divergenz an den Stellen $\xi_k = \frac{2\pi k}{p+q}$ $(k = 1, 2, \ldots,$ $(p + q - 1))$ im behaupteten Umfange nachzuweisen, schicken wir einen Hilfssatz voraus, der sich zwar vermeiden ließe, jedoch die nötigen Abschätzungen etwas abkürzt:

Hilfssatz 1: a_k sei eine im schwächeren Sinne monotone Nullfolge und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. Dann ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} k\,(a_k - a_{k+1})$ bestimmt divergent.

Beweis des Hilfssatzes:[8]

O. B. d. A. seien die $a_k > 0$.

Setzt man

$$a_k - a_{k+1} = \alpha_k \geqq 0 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

dann ist offenbar

$$a_k = \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i \text{ für alle } k.$$

s_k bezeichne die *kte* Partialsumme von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, σ_k die von $\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k$.

Es ist nun

$$s_k = \sigma_k + k \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i$$

Aus der Konvergenz von σ_k folgte wegen $\alpha_k \geqq 0$ die Beschränktheit von $k \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i$ im Widerspruch zur Divergenz von s_k.

Wir kehren nun zum Beweise von 3 zurück.

Wir betrachten für ein beliebiges n und $0 \leqq m \leqq p - 1$ die Partialsumme

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{(i-1)(p+q)+1} \cos \xi_k + \ldots + a_{(i-1)(p+q)+p} \cos p\,\xi_k) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{m} a_{n(p+q)+l} \cos l\,\xi_k.$$

---

[8] Herr Prof. *Radon* hat meinen Beweis des Hilfssatzes 1 durch einen weitaus kürzeren ersetzt, den ich hier mit seiner gütigen Erlaubnis mitteile.

Ein äquivalenter Satz und Beweis findet sich schon bei *Ostrowski*, D. M. V. 34, p. 161—171.

Unter Benützung der Schreibweise

$$a_j - a_{j+1} = \Delta a_j$$

und

$$\sum_{r=1}^{s} \cos \xi_k r = S_s$$

läßt sich dies umformen in:

$$(8)\quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{p-1} \{ \Delta a_{(i-1)(p+q)+2} [(i-1) S_p + S_l] + i (a_{(i-1)(p+q)+p} - a_{i(p+q)+1}) S_p \} + \sum_{l=1}^{m} \Delta a_{n(p+q)+l} [nS_p + S_l] + a_{n(p+q)+m} [nS_p + S_m].$$

Es sei nun

$$S_p = \frac{\sin p \frac{\xi_k}{2} \cos (p+1) \frac{\xi_k}{2}}{\sin \frac{\xi_k}{2}} \neq 0, \text{ z. B. } > 0.$$ Dann gibt es eine positive ganze Zahl n_0, so daß

$$n_0 \frac{\sin \frac{p\xi_k}{2} \cos (p+1) \frac{\xi_k}{2}}{\sin \frac{\xi_k}{2}} \geqq p - 1$$

Wir betrachten nun den Ausdruck (8) erst von diesem Index an, lassen also die äußerste Summation erst bei $i = n_0$ beginnen.

Dann erhält man als eine untere Schranke:

$$\sum_{i=n_0}^{n} \left\{ (a_{(i-1)(p+q)+p} - a_{i(p+q)+1}) (i + 1 - n_0) + \sum_{l=1}^{p-1} \Delta a_{i(p+q)+l} (i + 1 - n_0) \right\} \frac{p-1}{n_0}$$

Anwendung des Hilfssatzes 1 ergibt aber die Behauptung.

4. Der Fall

$$\frac{\sin \frac{p\xi_k}{2} \cos (p+1) \frac{\xi_k}{2}}{\sin \frac{\xi_k}{2}} = 0$$

blieb bis jetzt unerledigt. Wir werden aber zeigen, daß dies nur eintreten kann, wenn einer der unter 4 genannten Ausnahmefälle vorliegt und umgekehrt.

a) Es ist nach Voraussetzung

$$\frac{2\pi k}{p+q} \cdot \frac{p}{2} = \frac{s\, l_1 (l_1 + l_2)\, l\, \pi}{s (l_1 + l_2)} = l\, l_1\, \pi$$

somit

$$\sin p \frac{\xi_k}{2} = 0 \tag{9}$$

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{(k-1)(p+q)+1} \cos [(k-1)(p+q)+1]\, x + \ldots + a_{(k-1)(p+q)+p} \cos [(k-1)(p+q)+p]\, x) \tag{10}$$

besitzt durchaus positive, monoton gegen 0 strebende Koeffizienten. Um die gleichmäßige Konvergenz an den Stellen ξ_k unter der Voraussetzung (9) nachzuweisen, ist zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n} (\cos [(k-1)(p+q)+1]\, x + \ldots + \cos [(k-1)(p+q)+p]\, x) + \sum_{k=1}^{m} \cos [n(p+q)+k]\, x$$

ist für alle n und $0 \leqq m \leqq \left[\frac{p+1}{2}\right]$ und alle x aus dem Intervall

$$\left| \xi_k - x \right| \leqq \frac{2\theta}{p+q}$$

bei passender Wahl von $\theta < \frac{\pi}{2}$ gleichmäßig beschränkt.

Wir formen hiezu die Kosinussumme um und erhalten:

$$\frac{\sin \frac{p\,x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \frac{\sin n \frac{(p+q)}{2} x \cos \left[(p+1)\frac{x}{2} + (n-1)\frac{(p+q)}{2} x\right]}{\sin \frac{(p+q)\,x}{2}} + \sum_{k=1}^{m} \cos [n(p+q)+k]\, x \tag{11}$$

Wir setzen $x = \xi_k + \frac{2\varepsilon}{p+q}$ mit $|\varepsilon| \leqq \theta$ und erhalten für den

Betrag von (11) die Abschätzung:

$$\leqq \frac{1}{\sin\left(\xi_k - \frac{2\theta}{p+q}\right)\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{|\varepsilon| p}{p+q}}{\sin|\varepsilon|} + \left[\frac{p+1}{2}\right] \leqq \frac{1}{\sin\left(\xi_k - \frac{2\theta}{p+q}\right)\frac{1}{2}} \frac{2p}{p+q} + \left[\frac{p+1}{2}\right]$$

wenn man θ hinreichend klein, aber dann fest, wählt, w. z. b. w.

b) Es ist

$$\frac{2\pi k}{p+q}\frac{p+1}{2} = \frac{\pi \frac{l_3+l_4}{2} l\, l_3\, r}{r(l_3+l_4)} = \frac{l\, l_3}{2}\pi$$

und l, l_3 nach Voraussetzung ungerade.

Also ergibt sich

$$\cos(p+1)\frac{\xi_k}{2} = 0. \tag{12}$$

Die Konvergenz an der Stelle ξ_k unter Beachtung von (12) ist sehr leicht einzusehen. Man beachte hiezu, daß man für die in (8) auftretenden Kosinussummen $p-1$ als eine obere Schranke erhält, also ist wegen (2) und (3) die Konvergenz bewiesen.

Gilt nun umgekehrt

$$\frac{\sin\frac{p\xi_k}{2}\cos(p+1)\frac{\xi_k}{2}}{\sin\frac{\xi_k}{2}} = 0,$$

dann folgt also (9) oder (12). Wir zeigen, daß aus (9) die unter 4 a) formulierten Bedingungen für p, q und k folgen. Es ist dann notwendig für $k = k_1$

$$\frac{\pi p k_1}{p+q} = \pi l_1$$

wobei $l_1 > 0$ und ganz ist. Man kann $(k_1, l_1) = 1$ voraussetzen, denn wenn dies nicht der Fall ist, hat man $k_1 = k_2 r$ und $l_1 = l_2 r$ $(r > 1$, ganz) und da $k_2 < k_1$, muß dann (9) schon für k_2 gelten, wobei $(k_2, l_2) = 1$.

Aus

$$pk_1 - (p+q) l_1 = 0$$

folgt aber, daß p und q nicht teilerfremd sind. Wegen $(k_1, l_1) = 1$ wird $\frac{p}{l_1} = \frac{p+q}{k_1} = s$, $(s > 1$, ganz), also ist s größter gemeinsamer Teiler von p und $p+q$, daher auch von p und q und es ist $\frac{p}{s} + \frac{q}{s} = k_1$. Alle Vielfachen von k_1, soferne sie $p+q-1$ nicht überschreiten, liefern ebenfalls Konvergenzstellen $\frac{2\pi l k_1}{p+q}$.

Analog zeigt man, daß aus (12) die unter 4.) b) gegebenen Bedingungen für p, q und k folgen, womit der Beweis in allen Teilen vollendet ist.

Satz 4 ergibt die Möglichkeit Reihen (4) zu konstruieren, welche bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ in jedem Intervall der Länge ε mindestens eine Divergenzstelle besitzen. Man wähle hiezu $p + q \geqq \frac{2\pi}{\varepsilon}$ und $(p, q) = 1$ sowie $(p+1, q-1) = 1$.

Es ist also nicht möglich, Satz 3 derart als Grenzfall des Satzes 4 aufzufassen, daß man z. B. $q = 1$ wählt und p eine Folge ganzer Zahlen durchlaufen läßt, welche über alle Grenzen wachsen, so daß das erste auftretende Reihenglied mit negativem Koeffizienten einen beliebig hohen Index erhält, da die Divergenzstellen der so entstehenden Reihen im Intervall $[0, 2\pi)$ beliebig dicht liegen.

4.

Wir wollen nun Satz 4 noch in naheliegender Weise verallgemeinern und gelangen damit zu einer ziemlich allgemeinen Klasse von trigonometrischen Reihen (4), welche den Voraussetzungen (2) und (3) genügen. Es möge eine Reihe vorliegen, in der auf p_1 positive, q_1 negative, dann auf p_2 positive, q_2 negative usw. schließlich auf p_i positive, q_i negative Koeffizienten a folgen und dies wiederhole sich, wobei i festgehalten wird. Wir bezeichnen die Reihe wieder mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{13}$$

und setzen zur Abkürzung

$$\sum_{k=1}^{i} (p_k + q_k) = v_i.$$

Dann gilt:

Satz 5: Eine Reihe der Form (13), für welche $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergiert,

konvergiert mindestens in jedem abgeschlossenen Intervall, das in einem offenen Intervall $\left(\frac{2\pi(k-1)}{v_i}, \frac{2\pi k}{v_i}\right)(k=1,2,\ldots,v_i)$ enthalten ist, gleichmäßig.

Beweis:

Wir verfahren ganz ähnlich wie beim Beweise zum Satz 4.

Ersetzt man nämlich in (13) alle Koeffizienten durch ihre Beträge, dann entsteht eine Reihe, welche in jedem abgeschlossenen in $(0,2\pi)$ enthaltenen Intervall gleichmäßig konvergiert. Addition dieser Reihe und (13) ermöglicht die Anwendung des *Dirichlet*schen Kriteriums.

Es genügt also zu zeigen:

$$(14)\quad \left| \sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{r_1=1}^{p_1} e^{(kv_i+r_1)\,i\,x} + \sum_{r_2=v_1+1}^{v_1+p_2} e^{(kv_i+r_2)\,i\,x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ldots + \sum_{r_i=v_{i-1}+1}^{v_{i-1}+p_i} e^{(kv_i+r_i)\,i\,x} \right\} \right|$$

bleibt für jedes n gleichmäßig beschränkt, wenn man x auf die im Satz angegebenen abgeschlossenen Intervalle beschränkt.

(14) kann aber leicht umgeformt werden in

$$\sum_{r=0}^{i-1} \left\{ \frac{e^{i\,x\,p_{r+1}}-1}{e^{i\,x}-1}\, e^{ix\left[\sum_{k=0}^{r}(p_k+q_k)+1\right]} \right\} \frac{e^{inv_i x}-1}{e^{ixv_i}-1} \quad (p_0=q_0=0).$$

Für die im Satze genannten x bleibt aber dieser Ausdruck ähnlich wie beim Beweise zu Satz 4 gleichmäßig beschränkt, w. z. b. w.

Das Verhalten von (13) an den Stellen $\frac{2\pi(k-1)}{v_i}$ $k=1,2,\ldots,v_i$ ist umständlicher zu untersuchen, doch lassen sich Ergebnisse, welche denen des Satzes 4 analog sind, auch hier ableiten. Wir wollen das jetzt nicht weiter verfolgen und nur noch folgendes zeigen:

Zusatz zu Satz 5: Die Reihe (13) konvergiert im Nullpunkt genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{i} p_k = \sum_{k=1}^{i} q_k$. Für $\sum_{k=1}^{i} p_k \neq \sum_{k=1}^{i} q_k$ herrscht dort Divergenz.

Beweis:

Mit der Bezeichnung

$$\sum_{j=k_1}^{k_2} |a_j| = A_{k_1}^{k_2}$$

wird die Reihe (13) im Nullpunkt

$$(15)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{A_{nv_i+1}^{nv_i+p_1}-A_{nv_i+p_1+1}^{nv_i+v_1}+A_{nv_i+v_1+1}^{nv_i+v_1+p_2}-A_{nv_i+v_1+p_1+1}^{nv_i+v_2}+$$

$$+-\ldots+A_{nv_i+v_{i-1}+1}^{nv_i+v_{i-1}+p_i}-A_{nv_i+v_{i-1}+p_i+1}^{nv_i+v_i}\Big\}$$

Mit der Bezeichnung

$$|a_j|-|a_{j+1}|=\triangle a_j$$

wird (15) mittels der Abelschen Umformung unter der Voraussetzung $\Sigma p_k = \Sigma q_k$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\triangle a_{1+nv_i}\cdot 1+\ldots+\triangle a_{p_1+nv_i}p_1+\triangle a_{p_1+1+nv_i}(p_1-1)+\ldots+$$
$$+\triangle a_{v_i+nv_i}\cdot(p_1-q_1)+\triangle a_{v_i+1+nv_i}(p_1-q_1+1)+\ldots+\triangle a_{v_i+p_2+nv_i}$$
$$(p_1-q_1+p_2)+\ldots+\triangle a_{v_i-1+nv_i}\cdot 1)$$

Wegen (2) und (3) ergibt eine einfache Abschätzung Konvergenz.

Eine analoge Umformung im Falle $\Sigma p_k \neq \Sigma q_k$ führt unter Heranziehung des Hilfssatzes zum gewünschten Resultat.

5.

Wir wollen nun Anwendungen der zum Beweis von Satz 4 und 5 verwendeten Methode geben. Diese bestand offenbar im wesentlichen darin, daß man von der gegebenen Reihe (4) bzw. (13) zu einer Lückenreihe übergeht, deren Verhalten in Bezug auf Konvergenz in jedem abgeschlossenen Intervall, das den Nullpunkt nicht enthält, mit dem der gegebenen Reihe übereinstimmt. Somit kann aber die Aussagen der Sätze 4 und 5 als Ergebnisse über trigonometrische Lückenreihen, deren Koeffizienten monoton gegen 0 abnehmen, deuten[9].

Wie dies präziser zu geschehen hat, ergibt sich aus

Satz 6: L sei eine beliebige positive ganze Zahl. Es liege eine trigonometrische Lückenkosinusreihe vor mit monoton gegen 0 abnehmenden Koeffizienten a_{k_j} derart, daß alle Koeffizienten fehlen, deren Indizes bestimmten Restklassen mod L angehören und $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ divergiere. Dann

[9] Man kann die Voraussetzungen über die Koeffizienten leicht dahin verallgemeinern, daß sie dem Betrage nach monoton gegen 0 streben sollen.

besitzt die Reihe höchstens L-Stellen im Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ von der Gestalt $\frac{2\pi k}{L}$ $(k = 0, 1, \ldots, L-1)$, an denen die gleichmäßige Konvergenz unterbrochen ist. Die Lage der Stellen, an denen die Reihe singuläres Verhalten aufweisen kann, hängt also nur vom Modul L und nicht von der Verteilung oder Anzahl der Lücken ab.

Beweis: Man beachte, daß Satz 5 sinnvoll bleibt, wenn in der dort gebrauchten Bezeichnung q_i verschwindet. Es folgen dann auf p_i positive immer wieder p_1 positive Koeffizienten.

Wir nehmen nun an, daß sich Lücken mod L an den Stellen befinden:

$$p_1 + 1, \ldots, v_1, v_1 + p_2 + 1, \ldots, v_2, \ldots, v_{i-1} + p_i + 1, \ldots, v_i.$$

Wir setzen $L = v_i$ und falls $q_i = 0$, dann hat der letzte fehlende Koeffizient mod L die Nummer v_{i-1} und es folgen dann noch genau p_i Glieder mod L. Es ist nun auch klar, wie man vorzugehen hat, wenn das erste auftretende Glied der Reihe (mod L) eine höhere Nummer als 1 besitzt. Anwendung des Satzes 5 liefert Satz 6 unter Berücksichtigung der Voraussetzung, daß $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ divergiert.

Wir wollen noch den Fall betrachten, daß in einer trigonometrischen Lückenkosinusreihe mit monoton gegen 0 abnehmenden Koeffizienten, alle Koeffizienten, deren Indizes beliebigen, aber festen Restklassen nach endlich vielen Moduln angehören, verschwinden.

Wir zeigen also den

Satz 7: Es sei eine Lückenkosinusreihe gegeben mit monoton gegen 0 abnehmenden Koeffizienten a_{k_j}. Es mögen alle Koeffizienten fehlen, deren Indizes beliebig gewählten Restklassen mod L_r $(r = 1, 2, \ldots, s)$ angehören und $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ sei divergent. Mit V bezeichne man das kleinste g. Vielfache von $L_1, L_2, \ldots, L_s$. Dann besitzt die Reihe höchstens V singuläre Stellen der Gestalt $\frac{2\pi v}{V}$ $(v = 0, 1, \ldots, V-1)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ und mindestens ist jedes abgeschlossene Intervall, welches in seinem Innern oder als Randpunkt keinen Punkt der Form $\frac{2\pi v}{V}$ enthält, Intervall gleichmäßiger Konvergenz.

Beweis: Aus elementaren Ergebnissen der Zahlentheorie folgt, daß man die Kongruenten mod L_r zusammenfassen kann zu Kongruenzen mod V. Damit ist der weitere Beweis auf Satz 6 zurückgeführt.

6.

Wir gehen noch kurz auf Reihen der Form (5) ein, welche (2′) und (3′) erfüllen.

Es lautet jetzt

Satz 1′: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergiert, dann konvergiert (5) in $0 \leqq x < 2\pi$ gleichmäßig und absolut. (5) ist die *Fourier*sche Reihe einer stetigen Funktion[2]. Aber sogar aus der absoluten Konvergenz an einer beliebigen Stelle $\neq 0, \pi$ folgt die absolute Konvergenz im ganzen Periodizitätsintervall[3].

Es ist ohneweiteres ersichtlich, wie Satz 2 zu modifizieren ist.

Satz 3′: Haben die Koeffizienten von (5) einerlei Vorzeichen und divergiert $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, dann konvergiert die Reihe für jedes $0 < \theta < \pi$ in $[\theta, 2\pi - \theta]$ gleichmäßig und ungleichmäßig oder gleichmäßig in einer Umgebung des Nullpunktes. Die Konvergenz ist in keinem Falle absolut.[6]

Notwendig und hinreichend für gleichmäßige Konvergenz im Nullpunkt ist die Bedingung $\lim_{n \to \infty} nb_n = 0$[10].

Es ist klar, daß die Reihe nicht die *Fourier*sche Reihe einer L-integrierbaren Funktion sein muß. (Man wähle z. B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ divergent).

Wir gehen noch auf den zu Satz 4 analogen Satz ein:

Aussage 1) gilt auch hier unverändert. 2) ist entsprechend abzuändern, da im Nullpunkt immer Konvergenz herrscht. Ebenso sind 3) und 4) zu modifizieren, da an Stelle des Ausdruckes

$$\frac{\sin p \frac{\xi_k}{2} \cos (p+1) \frac{\xi_k}{2}}{\sin \frac{\zeta_k}{2}} \text{ der Ausdruck } \frac{\sin p \frac{\xi_k}{2} \sin (p+1) \frac{\xi_k}{2}}{\sin \frac{\xi_k}{2}}$$

tritt.

Es ist dann sofort zu sehen, in welchem Umfange Sätze 5′, 6′ und 7′ gelten.

---

[10] *T. W. Chaundy* und *A. E. Jolliffe*, „The uniforme convergence of a certain class of trigonometrical series". Proc. of the London Math. Soc., s. II, vol. XV (1916), p. 214—216.

Addition von Reihen der Form (4) und (5) ergeben trigonometrische Reihen der Gestalt (1). Durch Kombination der erhaltenen Ergebnisse bekommen wir Aussagen über das Verhalten von (1) unter den Voraussetzungen (2), (2′) und (3), (3′).

Wir heben hervor, daß die auf Satz 5 beruhenden Sätze 6 und 7 sinngemäß für Reihen (1) übernommen werden können. Eine genauere Diskussion des Verhaltens der in Satz 5 und 5′ genannten Reihen an den singulären Stellen wird somit die Frage nach dem Verhalten gewisser mit Lücken behafteter Potenzreihen auf dem Einheitskreis im Sinne einer *Ostrowski*schen Problemstellung vollständig lösen[11]. In voller Allgemeinheit scheint diese Frage große Schwierigkeiten zu bieten[12].

[11] *A. Ostrowski*, Jahresbericht d. Deutschen Math. Ver., 35. Band (1926), p. 269—280.

[12] *A. Ostrowski* l. c. 11) und *Th. Motzkin*, Math. Annalen, Band 109 (1934), p. 95—100.

Buchbesprechungen.

Functions of a Complex Variable. Von *Th. M. Mac Robert.* Dritte Auflage. Mit 83 Textabb., 390 S. London: Macmillan and Co., Limited 1947.

Das vorliegende Buch bringt ausführlich die klassischen Grundtatsachen der Funktionentheorie mit Anwendungen auf die Theorie der Gammafunktion, der elliptischen Funktionen und der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Insbesondere werden die hypergeometrische Funktion, ihre Verallgemeinerungen und Spezialfälle genau untersucht. Ein besonderes Augenmerk wird den asymptotischen Entwicklungen dieser Funktionen zugewendet. Das Buch kommt also den Bedürfnissen des theoretischen Physikers und angewandten Mathematikers sehr entgegen. Das Werk ist besonders für den Anfänger sehr zu empfehlen, da es gerade die Verwendung der funktionentheoretischen Sätze an vielen Beispielen erläutert. Hier liegen ja für den Studierenden meistens die größten Schwierigkeiten. Hervorzuheben ist die besonders große Anzahl von Beispielen zur Auswertung von Schleifenintegralen.

Wir geben nun eine kurze Inhaltsübersicht: I. Komplexe Zahlen, II. Funktionen einer komplexen Veränderlichen; Ein- und mehrdeutige Funktionen, III. Analytische Funktionen: Allgemeine Eigenschaften, die elementaren Funktionen, konforme Abbildung, IV. Integration: Die Cauchyschen Integralsätze und ihre Folgerungen, V. Konvergenz von Reihen: Taylorsche und Laurentsche Reihe, VI. Gleichmäßig konvergente Reihen, unendliche Produkte: Legendresche Polynome, Satz von Mittag-Leffler und Weierstraß, Gamma- und Sigmafunktion, VII. Verschiedene Summationen und Entwicklungen: Lagrangesche Reihe, Analytische Fortsetzung, Abelscher Satz, VIII. Ganze Funktionen, IX. Integrale von meromorphen und mehrdeutigen Funktionen, elliptische Integrale: der Reduktion auf Normalformen wird besonderes Augenmerk zugewendet, X. und XI. Weierstraßsche und Jakobische elliptische Funktionen, XII. und XIII. Lineare Differentialgleichungen und ihre regulären Lösungen, XIV. Legendresche und Besselsche Gleichungen, Gleichungen vom Fuchsschen Typus: Besondere Behandlung der Riemannschen P-Funktion, XV. Lösung von Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale. Fünf Anhänge, die weitere Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion ihre Verallgemeinerungen, und das Fouriersche Integraltheorem bringen, beschließen das ausgezeichnete Buch.

E. Hlawka, Wien.

Die Bewegungsgruppen der Kristallographie. Von *J. J. Burckhardt.* (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften: Mineralogisch-geotechnische Reihe: Band II.) Mit 56 Textabb., 186 S. Basel: E. Birkhäuser. 1947. sfr. 24.50, geb. sfr. 29.—.

Die Lehre vom Aufbau der Materie hat nicht nur die Naturwissenschaften, sondern auch die Mathematik anhaltend beschäftigt, seitdem man versucht hat die Strukturlehre der Kristalle und der kristallinen Materie geometrisch aufzubauen. Die großen Erkenntnisse, die durch die glänzenden Untersuchungen vieler Forscher darüber gewonnen wurden, verlangten eine immer stärkere Berücksichtigung der geometrischen Konfigurationen und der Gruppentheorie.

Der Verfasser, der bereits durch zahlreiche eigene Abhandlungen zur Theorie der Bewegungsgruppen hervorgetreten ist, veröffentlicht mit diesem Buche eine

geschlossene Untersuchung über die Kristallklassen und kristallographischen Bewegungsgruppen. Zum Unterschied von anderen Autoren wird da bei der Kristallographie an Stelle des homogenen Diskontinuums das Punktgitter zugrunde gelegt, das bereits im ersten Kapitel des Buches ausführlich betrachtet wird. Die Eigenschaften aller möglichen Punktgitter werden durch seine Deckoperationen oder Symmetrien dargestellt.

Das Buch setzt sich zum Ziel, die Kristallklasse durch Eigenschaften einer Substitutionsgruppe völlig zu bestimmen. Für das Buch ist charakteristisch, daß neben dem Begriff der geometrischen Kristallklasse hauptsächlich die feinere arithmetische Klasseneinteilung benutzt wird. Dadurch gelingt auch die Beantwortung der Frage, welche Eigenschaften der Klassen für das Auftreten der Bewegungsgruppen maßgebend sind. Außerdem findet damit auch die scheinbar regellose Verteilung der Bewegungsgruppen auf die geometrischen Kristallklassen ihre naturgemäße Aufklärung.

Die arithmetischen Kristallklassen der Ebene und des Raumes werden nicht bloß auf dem üblichen Weg hergeleitet, sondern es wird außerdem noch ein neues und kürzeres Verfahren entwickelt, das der Methode der Reduktion der quadratischen Formen nachgebildet ist und Ansätze benutzt, die *H. Minkowski* ausgeführt hat. Durch diese Herleitung der binären und ternären arithmetischen Kristallklassen wird auch die arithmetische Theorie der Substitutionsgruppen neu beleuchtet und die Anwendung der Geometrie der Zahlen auf unser Gebiet neu belebt.

Während der zuerst angegebene Weg für die Ermittlung der arithmetischen Klassen auch in höherdimensionalen Räumen gangbar ist, läßt sich das letztere Verfahren auf Räume von höherer Dimensionszahl nicht mehr anwenden, da die Reduktion der quadratischen Formen nach aufeinanderfolgenden Minima dort nicht mehr durchführbar ist.

Der Hauptteil des Buches ist der zwei- und dreidimensionalen Theorie gewidmet. Das Buch bringt aber auch Ergebnisse über zyklische, symmetrische und alternierende Bewegungsgruppen für den Raum von n Dimensionen. Dadurch daß der Verfasser die Darstellung der Lehre von den diskreten Bewegungsgruppen auf die arithmetische Theorie der Gitter gründet, gelingt es ihm, den zahlreichen modernen Forschungsgebieten Rechnung zu tragen, die mit der Theorie der diskreten Bewegungsgruppen in Beziehung stehen.

Um den Anschluß an die geometrische Kristallographie zu wahren, werden für die Kristallklassen die eingebürgerten Bezeichnungen und Symbole verwendet. Das Buch berücksichtigt vollständig die gesamte einschlägige Literatur. Es spiegelt auch in kristallographischer Hinsicht den neuesten Stand wider und behandelt die aufgeworfenen Probleme mit den modernsten mathematischen Methoden.

Diese wertvolle Neuerscheinung, die eine interessante naturwissenschaftliche Anwendung der Gruppentheorie behandelt und eine Illustration der allgemeinen Theorie der Substitutionsgruppen darstellt, verdient die Aufmerksamkeit der Mathematiker und Naturwissenschafter. Die klare Sprache und die geschlossene Darstellungsform machen den dargebotenen Stoff auch dem Studenten anziehend und durchsichtig, der es außerdem begrüßen wird, daß an mathematischen Kenntnissen nur die Elemente der Determinantenlehre als bekannt vorausgesetzt werden und die benötigten Hilfsmittel der linearen Algebra und Gruppentheorie eingangs zusammengestellt sind. Insbesondere wird ein mit der geometrischen Kristallographie vertrauter Leser dem Verfasser leicht folgen können.

A. Reuschel, Steyr.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Johann Radon, Wien XVIII, Gentzgasse 53. - Druck: Tiroler Graphik Ges. m. b. H. Innsbruck, Innrain 27—29. - Papierzuweisung: 101/48/1/58.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Allgemeine Methodenlehre der Statistik

Ein Lehrbuch für alle wissenschaftlichen Hochschulen

Von

Dr. Felix Klezl-Norberg

a. o. Professor an der Universität Wien

Zweite, ergänzte Auflage

Mit 12 Abb. XII, 271 Seiten. 1946

In Österreich S 27.—, Im Ausland sfr. 24.—

Aus den Besprechungen:

„.. Die vorliegende Methodenlehre atmet noch den Geist des berühmten Wiener „statistischen Seminars": die logische Schärfe, die Verbundenheit mit einer vielseitigen statistischen Praxis, die angenehme Darstellungsweise, welche nie trocken, aber auch nie weitschweifig oder umständlich wird, und schließlich eine seltene Weite des Blickes auch bei der bescheidensten Einzelheit..".

Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik. 82. Jg., Heft 5

„Der überragende und dauernde Wert des Buches liegt darin, daß es aus dem inneren Zusammenhang aller Probleme ein geschlossenes Lehrsystem vermittelt und die Stellung der Statistik als einer rein formalen Wissenschaft fest begründet. ... Eine erschöpfendere und vielseitigere Behandlung der statistischen Methoden... ist kaum denkbar...

Juristische Blätter, Wien
68 Jg., Nr. 10 (1946)

Wirtschaftsstatistik in Theorie und Praxis

Von

Dr. Felix Klezl-Norberg

a. o. Professor an der Universität Wien

XVI, 340 Seiten. 1947

In Österreich S 44.—, im Ausland sfr. 24.—

Aus den Besprechungen:

„... Das Buch stellt eine „allgemeine Methodenlehre der Wirtschaftsstatistik dar und abstrahiert von den besonderen Voraussetzungen, die sich für wirtschaftsstatistische Erhebungen aus der Eigenart naturbedingter Voraussetzungen oder gesetzlicher Vorschriften eines bestimmten Landes ergeben. ... Der Verfasser hat sich bewußt für die wissenschaftlich wertvollere Abgrenzung der Stoffbehandlung entschieden. ... Klezl dürfte in seiner persönlichen Bescheidenheit zu weit gehen, wenn er sein Lehrbuch einen bescheidenen Beitrag zur Wirtschaftsstatistik nennt, bietet es doch nicht nur in allen seinen Teilen dem Praktiker wertvolle Anregungen, sondern trägt ebenso sehr zur theoretischen Vertiefung der Wirtschaftsstatistik als auch zur statistischen Fundierung der Theorie der Wirtschaftswissenschaft bei. ... Das Buch ist ... leichtflüssig geschrieben und von geistvollen Formulierungen durchsetzt, die bei seiner Lektüre keine Ermüdung aufkommen lassen."

Industrielle Organisation
17. Jg., Nr. 1 (1948)

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria